

3ROUNDを持っていない人へ

[3ROUND数学II 問題52]

- (1) 等式 x+yi=2-3i を満たす実数 x, y は x=2, y=-3
(2) 等式 x+5i=-3+yi を満たす実数 x, y は x=-3, y=5
(3) 等式 (x+6)+3yi=4-6i を満たす実数 x, y は, x+6, 3y が実数であるから, x+6=4, 3y=-6 を解いて x=-2, y=-2
(4) 2(x+3i)=6+9yi から 2x+6i=6+9yi
2x, 9y が実数であるから, 2x=6, 6=9y を解いて x=3, y=2/3

[3ROUND数学II 問題53]

- (1) i+2i=(1+2)i=3i
(2) (2+3i)+(5+8i)=(2+5)+(3+8)i=7+11i
(3) (1+2i)+(8-6i)=(1+8)+(2-6)i=9-4i
(4) (1-i)-(2+3i)=1-i-2-3i=(1-2)+(-1-3)i=-1-4i
(5) (8+3i)-(4+6i)=8+3i-4-6i=(8-4)+(3-6)i=4-3i
(6) (2+i)-(4-3i)=2+i-4+3i=(2-4)+(1+3)i=-2+4i
(7) 4i(1-3i)=4i-12i^2=4i-12(-1)=12+4i
(8) (2+i)(1+i)=2+2i+i+i^2=2+2i+i+(-1)=1+3i
(9) (1+3i)(2+4i)=2+4i+6i+12i^2=2+4i+6i+12(-1)=-10+10i
(10) (2+6i)(3-2i)=6-4i+18i-12i^2=6-4i+18i-12(-1)=18+14i
(11) (2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4-9(-1)=13
(12) (1+2i)^2=1+4i+4i^2=1+4i+4(-1)=-3+4i

[3ROUND数学II 問題54]

- (1) i^5=(i^2)^2*i=(-1)^2*i=i
(2) i^7=(i^2)^3*i=(-1)^3*i=-i
(3) i-i^2+i^3-i^4=i-(-1)+i^2*i-i(-i^2)=i+1+(-1)*i-(-1)^2*i=i+1-i-1=0
(4) (1+i)^3=1^3+3*1^2*i+3*1*i^2+i^3=1+3i+3(-1)+i=i-2+2i

[3ROUND数学II 問題55]

- (1) 1+i と共役な複素数は 1-i
(2) 4+3i と共役な複素数は 4-3i
(3) 3-4i と共役な複素数は 3+4i
(4) sqrt(2)i=0+sqrt(2)i であるから, sqrt(2)i と共役な複素数は 0-sqrt(2)i=-sqrt(2)i
(5) -i=0-i であるから, -i と共役な複素数は 0+i=i
(6) -5=-5+0*i であるから, -5 と共役な複素数は -5-0*i=-5

[3ROUND数学II 問題56]

- (1) 2/i = 2i/i^2 = -2i
(2) 1/(-4i) = i/(-4i^2) = i/4
(3) 5/(1+2i) = 5(1-2i)/((1+2i)(1-2i)) = 5(1-2i)/(1-4i^2) = 5(1-2i)/5 = 1-2i
(4) 8/(2-3i) = 8(2+3i)/((2-3i)(2+3i)) = 16+24i/(4-9i^2) = 16+24i/(4+9) = 16/13 + 24/13i
(5) (2+3i)/(1+3i) = (2+3i)(1-3i)/((1+3i)(1-3i)) = (2-6i+3i-9i^2)/(1-9i^2) = (2-3i+9)/10 = 11/10 - 3/10i
(6) (3-2i)/(3+2i) = (3-2i)(3-2i)/((3+2i)(3-2i)) = (9-12i+4i^2)/9-4i^2 = (9-12i-4)/9+4 = 5/13 - 12/13i

[3ROUND数学II 問題57]

- (1) sqrt(-7) = sqrt(7)i
(2) sqrt(-9) = sqrt(9)i = 3i
(3) -sqrt(-25) = -sqrt(25)i = -5i
(4) -4 の平方根は sqrt(-4) = sqrt(4)i = 2i
(5) -45 の平方根は sqrt(-45) = sqrt(45)i = 3sqrt(5)i

[3ROUND数学II 問題61]

- (1) x^2=-3 の解は x=sqrt(-3)=sqrt(3)i
(2) x^2=-12 の解は x=sqrt(-12)=sqrt(12)i=sqrt(3)*2i
(3) x^2+20=0 から x^2=-20
よって x=sqrt(-20)=sqrt(20)i=sqrt(5)*2i
(4) x^2+16=0 から x^2=-16
よって x=sqrt(-16)=sqrt(16)i=4i
(5) (x+1)^2=-1 から x+1=sqrt(-1)=sqrt(i)*i
よって x=-1+i
(6) (3x-1)^2+5=0 から (3x-1)^2=-5
よって 3x-1=sqrt(-5)=sqrt(5)i

したがって x = (1 +/- sqrt(5)i) / 3

[3ROUND数学II 問題62]

- (1) x = (-5 +/- sqrt(5^2 - 4*1*1)) / 2*1 = (-5 +/- sqrt(21)) / 2
(2) x^2 - 3x + 2 = 0 から (x-1)(x-2) = 0
よって x = 1, 2
(3) x = (-3 +/- sqrt(3^2 - 4*1*3)) / 2*1 = (-3 +/- sqrt(-3)) / 2 = (-3 +/- sqrt(3)i) / 2
(4) x = (-sqrt(3) +/- sqrt((sqrt(3))^2 - 4*1*2)) / 2*1 = (-sqrt(3) +/- sqrt(-5)) / 2 = (-sqrt(3) +/- sqrt(5)i) / 2
(5) x^2 + 8x + 16 = 0 から (x+4)^2 = 0
よって x = -4
(6) x = ((-1) +/- sqrt((-1)^2 - 4*3*2)) / 2*3 = (1 +/- sqrt(-23)) / 6 = (1 +/- sqrt(23)i) / 6
(7) x = (-sqrt(2) +/- sqrt((sqrt(2))^2 - 4*1*(-4))) / 2*1 = (-sqrt(2) +/- sqrt(18)) / 2 = (-sqrt(2) +/- 3*sqrt(2)) / 2 = -2*sqrt(2), sqrt(2)
(8) x^2 - x + 1/4 = 0 から (x - 1/2)^2 = 0
よって x = 1/2
(9) x = (-5 +/- sqrt(5^2 - 4*2*6)) / 2*2 = (-5 +/- sqrt(-23)) / 4 = (-5 +/- sqrt(23)i) / 4
(10) 2x^2 - 7x - 15 = 0 から 1x^2 - 5x - 15 = 0
(x-5)(2x+3)=0
よって x = -3/2, 5
(11) 両辺に -1 を掛けると 3x^2 - 2x - 2 = 0
よって x = ((-2) +/- sqrt((-2)^2 - 4*3*(-2))) / 2*3 = (2 +/- sqrt(28)) / 6 = (2 +/- 2*sqrt(7)) / 6 = (1 +/- sqrt(7)) / 3
(12) x = (-4*sqrt(3) +/- sqrt((4*sqrt(3))^2 - 4*2*7)) / 2*2 = (-4*sqrt(3) +/- sqrt(-8)) / 4 = (-4*sqrt(3) +/- sqrt(8)i) / 4 = (-sqrt(3) +/- 2*sqrt(2)i) / 2

[3ROUND数学II 問題63]

- (1) D = (-2)^2 - 4*1*3 = -8 < 0
よって, x^2 - 2x + 3 = 0 の解は異なる2つの虚数解である。
(2) D = (-2)^2 - 4*1*(-1) = 8 > 0
よって, x^2 - 2x - 1 = 0 の解は異なる2つの実数解である。
(3) D = (-8)^2 - 4*1*16 = 0
よって, x^2 - 8x + 16 = 0 の解は重解である。
(4) D = (-1)^2 - 4*2*(-5) = 41 > 0
よって, 2x^2 - x - 5 = 0 の解は異なる2つの実数解である。
(5) D = (-12)^2 - 4*9*4 = 0
よって, 9x^2 - 12x + 4 = 0 の解は重解である。
(6) D = (-5)^2 - 4*3*4 = -23 < 0
よって, 3x^2 - 5x + 4 = 0 の解は異なる2つの虚数解である。
(7) D = (-sqrt(3))^2 - 4*2*1 = -5 < 0
よって, 2x^2 - sqrt(3)x + 1 = 0 の解は異なる2つの虚数解である。
(8) D = 5^2 - 4*(-1)*(-5) = 5 > 0
よって, -x^2 + 5x - 5 = 0 の解は異なる2つの実数解である。

[3ROUND数学II 問題65]

- (1) 2次方程式 x^2 + 4x + a = 0 の判別式は D = 4^2 - 4*1*a = 16 - 4a
2次方程式が虚数解をもつのは D < 0 のときであるから 16 - 4a < 0
これを解いて a > 4
(2) 2次方程式 2x^2 - 3x + a - 1 = 0 の判別式は D = (-3)^2 - 4*2*(a-1) = 17 - 8a
2次方程式が実数解をもつのは D >= 0 のときであるから 17 - 8a >= 0
これを解いて a <= 17/8
(3) 2次方程式 x^2 + 5ax + a = 0 の判別式は D = (5a)^2 - 4*1*a = 25a^2 - 4a = a(25a - 4)
2次方程式が虚数解をもつのは D < 0 のときであるから a(25a - 4) < 0
これを解いて 0 < a < 4/25
(4) 2次方程式 x^2 - 2ax + a + 2 = 0 の判別式は D = (-2a)^2 - 4*1*(a+2) = 4a^2 - 4a - 8 = 4(a^2 - a - 2) = 4(a+1)(a-2)
2次方程式が実数解をもつのは D >= 0 のときであるから 4(a+1)(a-2) >= 0
これを解いて a <= -1, 2 <= a

[3ROUND数学II 問題68]

- (1) alpha + beta = -2/1 = -2, alpha*beta = 5/1 = 5
(2) alpha + beta = -6/1 = 6, alpha*beta = 7/1 = 7
(3) alpha + beta = -2/3, alpha*beta = 5/3
(4) alpha + beta = -8/4 = 2, alpha*beta = -3/4 = -3/4
(5) alpha + beta = -4/2 = 2, alpha*beta = 1/2 = 1/2
(6) alpha + beta = -4/3 = 4/3, alpha*beta = 6/3 = 2

[3ROUND数学II 問題69]

- (1) alpha + beta^2 = (alpha + beta)^2 - 2*alpha*beta = (-3)^2 - 2*(-2) = 13
(2) (alpha - beta)^2 = alpha^2 - 2*alpha*beta + beta^2 = (alpha + beta)^2 - 4*alpha*beta
(1)より, alpha + beta = 13 であるから (alpha - beta)^2 = 13 - 2*(-2) = 17
(3) alpha^2 + alpha*beta = alpha*beta + alpha = (-2)*(-3) = 6
(4) alpha/beta + beta/alpha = (alpha^2 + beta^2) / (alpha*beta)
(1)より, alpha + beta = 13 であるから alpha/beta + beta/alpha = (13^2 - 2*(-3)) / (-2) = -13/2

[3ROUND数学II 問題70]

- (1) 2次方程式 x^2 - 6x + 4 = 0 の解は x = (-(-6) +/- sqrt((-6)^2 - 4*1*4)) / 2*1 = (6 +/- sqrt(20)) / 2 = (6 +/- 2*sqrt(5)) / 2 = 3 +/- sqrt(5)
よって x^2 - 6x + 4 = (x - (3+sqrt(5)))(x - (3-sqrt(5))) = (x - 3 - sqrt(5))(x - 3 + sqrt(5))
(2) 2次方程式 x^2 - 2 = 0 の解は x = +/- sqrt(2)
よって x^2 - 2 = (x - sqrt(2))(x + sqrt(2)) = (x - sqrt(2))(x + sqrt(2))
(3) 2次方程式 x^2 + 2x + 5 = 0 の解は x = (-2 +/- sqrt(2^2 - 4*1*5)) / 2*1 = (-2 +/- sqrt(-16)) / 2 = (-2 +/- 4i) / 2 = -1 +/- 2i
よって x^2 + 2x + 5 = (x - (-1+2i))(x - (-1-2i)) = (x+1-2i)(x+1+2i)
(4) 2次方程式 x^2 + 4 = 0 の解は x = +/- 2i
よって x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i) = (x - 2i)(x + 2i)
(5) 2次方程式 2x^2 + 5x + 1 = 0 の解は x = (-5 +/- sqrt(5^2 - 4*2*1)) / 2*2 = (-5 +/- sqrt(17)) / 4
よって 2x^2 + 5x + 1 = 2(x - (-5+sqrt(17))/4)(x - (-5-sqrt(17))/4) = 2(x + 5/4 - sqrt(17)/4)(x + 5/4 + sqrt(17)/4)
(6) 2次方程式 3x^2 + 4x + 2 = 0 の解は x = (-4 +/- sqrt(4^2 - 4*3*2)) / 2*3 = (-4 +/- sqrt(-8)) / 6 = (-4 +/- sqrt(8)i) / 6 = (-2 +/- sqrt(2)i) / 3
よって 3x^2 + 4x + 2 = 3(x - (-2+sqrt(2)i)/3)(x - (-2-sqrt(2)i)/3) = 3(x + 2/3 - sqrt(2)i/3)(x + 2/3 + sqrt(2)i/3)

[3ROUND数学II 問題71]

- (1) 2数の和は (-1) + (-2) = -3
2数の積は (-1) * (-2) = 2
よって, -1, -2 を解にもつ2次方程式の1つは x^2 + 3x + 2 = 0
(2) 2数の和は 1/2 + 1 = 3/2
2数の積は 1/2 * 1 = 1/2
よって, 1/2, 1 を解にもつ2次方程式の1つは x^2 - 3/2x + 1/2 = 0
両辺に2を掛けて 2x^2 - 3x + 1 = 0
(3) 2数の和は (1+sqrt(3)) + (1-sqrt(3)) = 2
2数の積は (1+sqrt(3))(1-sqrt(3)) = 1^2 - (sqrt(3))^2 = -2
よって, 1+sqrt(3), 1-sqrt(3) を解にもつ2次方程式の1つは x^2 - 2x - 2 = 0
(4) 2数の和は (2+3i) + (2-3i) = 4
2数の積は (2+3i)(2-3i) = 2^2 - (3i)^2 = 13
よって, 2+3i, 2-3i を解にもつ2次方程式の1つは x^2 - 4x + 13 = 0
(5) 2数の和は (-3i) + 3i = 0
2数の積は (-3i) * 3i = -9i^2 = 9
よって, -3i, 3i を解にもつ2次方程式の1つは x^2 + 9 = 0
(6) 2数の和は (3+2*sqrt(2)) + (3-2*sqrt(2)) = 6

- 2数の積は (3+2*sqrt(2))(3-2*sqrt(2)) = 3^2 - (2*sqrt(2))^2 = 1
よって, 3+2*sqrt(2), 3-2*sqrt(2) を解にもつ2次方程式の1つは x^2 - 6x + 1 = 0
(7) 2数の和は (5+sqrt(6)i) + (5-sqrt(6)i) = 5
2数の積は (5+sqrt(6)i)(5-sqrt(6)i) = (5+sqrt(6)i)(5-sqrt(6)i) = 5^2 - (sqrt(6)i)^2 = 31/4
よって, (5+sqrt(6)i)/2, (5-sqrt(6)i)/2 を解にもつ2次方程式の1つは x^2 - 5x + 31/4 = 0
両辺に4を掛けて 4x^2 - 20x + 31 = 0

[3ROUND数学II 問題77]

- (1) P(x) = x^3 - 3x + 2 について
(1) P(1) = 1^3 - 3*1 + 2 = 0
(2) P(-1) = (-1)^3 - 3*(-1) + 2 = 4
(3) P(2) = 2^3 - 3*2 + 2 = 4
(4) P(-2) = (-2)^3 - 3*(-2) + 2 = 0
(5) P(3) = 3^3 - 3*3 + 2 = 20
(6) P(-3) = (-3)^3 - 3*(-3) + 2 = -16

[3ROUND数学II 問題78]

- (1) x-1 で割った余りは P(1) = 2*1^2 - 3*1 + 2 = 1
(2) x+1 で割った余りは P(-1) = (-1)^2 - 3*(-1) - (-1) + 3 = 0
(3) x+2 で割った余りは P(-2) = (-2)^2 - 3*(-2) - (-2) + 30 = 60
(4) x+3 で割った余りは P(-3) = (-3)^2 + (-3) - (-3) - 36 = 0

[3ROUND数学II 問題79]

- (1) P(1) = 1^3 - 1^2 - 1 - 2 = -3 であるから, x-1 は P(x) の因数ではない。
P(2) = 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 0
よって, x-2 は P(x) の因数である。
(2) P(-1) = (-1)^3 + 4*(-1)^2 + 9*(-1) + 10 = 4 であるから, x+1 は P(x) の因数ではない。
P(-2) = (-2)^3 + 4*(-2)^2 + 9*(-2) + 10 = 0
よって, x+2 は P(x) の因数である。
(3) P(1) = 1^3 + 4*1^2 + 1 - 6 = 0
よって, x-1 は P(x) の因数である。
P(2) = 2^3 + 4*2^2 + 2 - 6 = 20 であるから, x-2 は P(x) の因数ではない。
(4) P(-3) = (-3)^3 - 2*(-3)^2 - 5*(-3) + 6 = -24 であるから, x+3 は P(x) の因数ではない。
P(3) = 3^3 - 2*3^2 - 5*3 + 6 = 0
よって, x-3 は P(x) の因数である。

[3ROUND数学II 問題80]

- (1) P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 とすると P(1) = 1^3 - 2*1^2 - 1 + 2 = 0
よって, P(x) は x-1 を因数にもつ。
右の割り算から
P(x) = (x-1)(x^2 - x + 2)
さらに因数分解して
x^2 - x + 2 = (x-2)(x+2)
よって P(x) = (x-1)(x-2)(x+2)
(2) P(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15 とすると P(1) = 1^3 + 7*1^2 + 7*1 - 15 = 0
よって, P(x) は x-1 を因数にもつ。
右の割り算から
P(x) = (x-1)(x^2 + 8x + 15)
さらに因数分解して
x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)
よって P(x) = (x-1)(x+3)(x+5)
(3) P(x) = x^3 + 4x^2 - 15x - 18 とすると P(-1) = (-1)^3 + 4*(-1)^2 - 15*(-1) - 18 = 0
よって, P(x) は x+1 を因数にもつ。
右の割り算から
P(x) = (x+1)(x^2 + 3x - 18)
さらに因数分解して
x^2 + 3x - 18 = (x-3)(x+6)
よって P(x) = (x+1)(x-3)(x+6)