

## 図 形

### 《目標》

- ① 平面図形や空間図形についての観察、操作や実験を通して、図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに、論理的に考察する基礎を培う。
- ② 基本的な平面図形の性質について、観察、操作や実験を通して理解を深めるとともに、図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法とを理解し、推論の過程を的確に表現する能力を養う。
- ③ 図形の相似や三平方の定理について、観察、操作や実験を通して理解し、それらを図形の性質の考察や計量に用いる能力を伸ばすとともに、図形について見通しをもって論理的に考察し表現する能力を伸ばす。

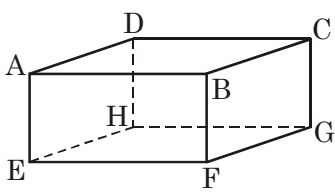
### 【事例 5】 第1学年 直線と平面の垂直

(1) ねらい

- ① 具体的な模型の観察を通して、直線と平面の垂直の定義についての理解を図る。
- ② 直線と平面が垂直であることの定義に関するイメージを活用し、垂直であることを論理的に説明する力を養う。

(2) 学習テーマ「直線と平面の垂直についてのイメージづくりをしよう」

学習の流れ	学習活動と指導者の働きかけ												
課題把握	<p>○学習具を作成する（班に一つ）。</p> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>①鉛筆を班に1本ずつ用意し、底面を少し斜めに削り取る。</p> <p>②鉛筆の底面に両面テープを貼り、土台に固定する。</p> <p>③のぞき穴をいくつか開けた箱を用意し、鉛筆を覆う。</p> </div> <p>☆いろいろな穴から中をのぞいて、鉛筆を観察してみましょう。</p> <p style="padding-left: 20px;">→このとき、垂直（見かけ上）に見えたり、斜めに見えたりする。</p>												
自力解決	<p>○鉛筆を固定した面に鉛筆が垂直であるかどうかを判断するためにはどうすればよいかを考える。特定の2か所ののぞき穴から観察したときだけ、鉛筆が見かけ上垂直に見えてしまうことに気付く。</p> <p style="padding-left: 20px;">意見1：すべての穴からのぞいて、垂直に見えたらよい。</p> <p style="padding-left: 20px;">意見2：三つの穴からのぞいて、垂直に見えたらよい。</p> <p style="padding-left: 20px;">意見3：二つの穴からのぞいて、垂直に見えたらよい。</p>												
集団解決	<p>○上の三つの意見を、「正しさ」、「合理性」という観点から検討する。</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 5px 0;"> <thead> <tr> <th style="width: 10%;"></th> <th style="width: 15%;">正しさ</th> <th style="width: 75%;">合理性</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>意見1</td> <td style="text-align: center;">○</td> <td>△：判断するまでに、たいへんな労力を必要とする。</td> </tr> <tr> <td>意見2</td> <td style="text-align: center;">○</td> <td>○：上の観察でも、鉛筆が垂直に見えてしまうのぞき穴が二つあったので、三つの方向から調べる必要がある。</td> </tr> <tr> <td>意見3</td> <td style="text-align: center;">条件付きで○</td> <td>◎：垂直に見えてしまうのぞき穴は、ちょうど向かい合わせの位置にあるので、自分でのぞく穴を選べるのなら、二つの穴からの観察ですむ。</td> </tr> </tbody> </table> <p>○直線と平面が垂直であることの定義を、「意見1」を基にして確認する。</p>		正しさ	合理性	意見1	○	△：判断するまでに、たいへんな労力を必要とする。	意見2	○	○：上の観察でも、鉛筆が垂直に見えてしまうのぞき穴が二つあったので、三つの方向から調べる必要がある。	意見3	条件付きで○	◎：垂直に見えてしまうのぞき穴は、ちょうど向かい合わせの位置にあるので、自分でのぞく穴を選べるのなら、二つの穴からの観察ですむ。
	正しさ	合理性											
意見1	○	△：判断するまでに、たいへんな労力を必要とする。											
意見2	○	○：上の観察でも、鉛筆が垂直に見えてしまうのぞき穴が二つあったので、三つの方向から調べる必要がある。											
意見3	条件付きで○	◎：垂直に見えてしまうのぞき穴は、ちょうど向かい合わせの位置にあるので、自分でのぞく穴を選べるのなら、二つの穴からの観察ですむ。											

課題把握	<p>○直線と平面が垂直であることの定義を基にして、次の課題を考える</p> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> <p>右図の立体は直方体です。 「直線AB ⊥ 面AEHD」であることを説明しましょう。</p> </div> 
自力解決	<p>○「意見3」を参考にしながら、課題を論理的に説明する流れを考える。</p> <p>①直線と平面との交点を確認する。 ②交点を通る平面上の2直線に着目する。 ③着目した2直線と直線ABとがそれぞれ垂直であることを述べる。</p>
集団解決	<p>○小集団で互いに説明した後、数人の生徒が黒板で発表する。 ○説明の流れや簡潔さ等に注目し、各発表のよさを相互評価する。</p>
まとめ	<p>○課題と類似した問題を考え、それぞれの説明の流れを確認する。</p>

### (3) 補充的な学習

小学校においては図形の性質を直観的にとらえる学習が中心であるのに対し、中学校第1学年においては、観察、操作や実験を通して、図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに、図形の性質を論理的に考察する基礎を培うことが重要になってくる。直線と平面の垂直についても、直観的な把握に加えて、論理的な考察が必要となる。しかし、直線と平面の垂直に関する定義は暗記しているものの、十分な納得や理解を伴っていないという場合が多くあり、実際には、論理的に説明することの不得意な生徒がかなりいる。

空間図形を把握するとき、ある一つの方向からとらえた平面的な図形だけを考えている場合が多く、立体として認識できるようにするためには、自己の知識や経験に照らして、まだ把握できていない隠れた情報や関係に気付くことが重要である。

一つの方向からの観察だけでは空間図形の真の姿を把握できないという事実を、実体験によって深く意識させるという観点が必要であり、空間図形に限らず、図形の学習の基本として、本事例のような「観察」を図形の性質の理解における大切な活動として位置付けたい。

### (4) 発展的な学習

数学的な推論の意義や方法を理解することは、図形の学習において重要なことである。そして、その推論の進め方やわかったことを他の人が納得できるように説明することが重要である。そこで、他の人に対して説明する内容を言葉、図、式を用いてノートに論理的に表現させてみる。これができるようになれば、第2学年以降で学習する「証明」に関する基礎的な力につながると考えられる。

### (5) 評価の観点

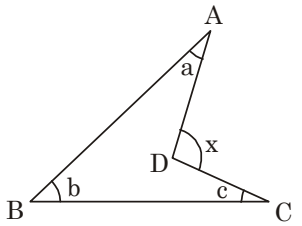
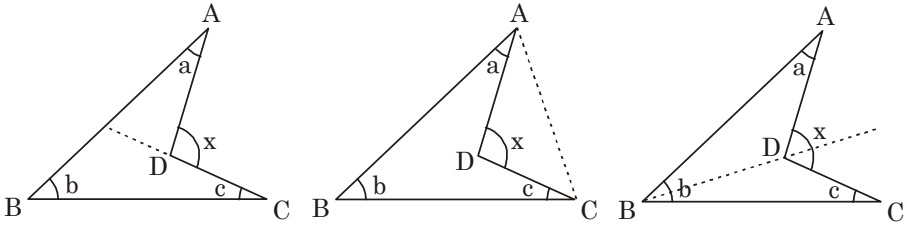
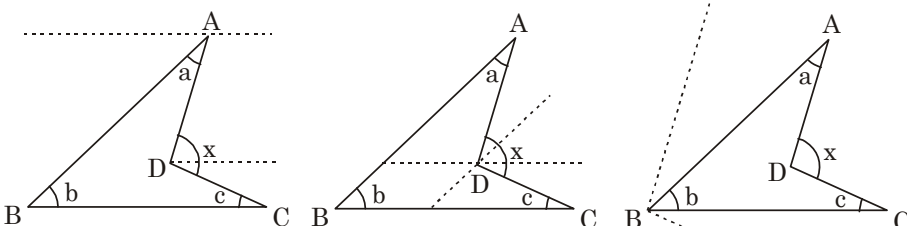
数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量、図形などについての知識・理解
・空間における直線と平面の垂直に関心をもち、観察、操作や実験を通して、それについて考えようとする。	・空間における直線と平面の垂直について、見通しをもち、観察、操作や実験を通して、考察することができる。	・空間における直線と平面の垂直について、言葉や図を用いて、論理的に説明することができる。	・空間における直線と平面の定義を述べ、日常生活の中に垂直関係を見出し、垂直であることを確かめることができる。

【事例 6】 第2学年 平行線と角

(1) ねらい

- ①角についての性質等を利用して、特定の角の大きさを求める。
- ②三角形の内角の和や外角に関する性質を理解し、これを利用する。
- ③平行線の同位角や錯角の性質を理解し、これを利用する。
- ④角の大きさを求める問題を通して、問題解決の方法として多様な考え方があることに気付く。

(2) 学習テーマ「角の大きさを求めよう」

学習の流れ	学習活動と指導者の働きかけ
課題把握	<p>○課題を提示する。</p> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> <p>①右図において、<math>\angle a</math>、<math>\angle b</math>、<math>\angle c</math>、<math>\angle x</math>の間に成り立つ関係を調べましょう。</p> <p>②右図において、3点A、B、Cを固定し、点Dを様々な位置に動かすとき、<math>\angle a</math>、<math>\angle b</math>、<math>\angle c</math>、<math>\angle x</math>の間に成り立つ関係を調べましょう。</p> </div> 
自力解決	<p>○三角形の内角の和や外角に関する性質、平行線の同位角や錯角の性質を利用して、角を移したり集めたりして考える。</p> <p>○できるだけ多様な考え方で試みる。</p>
集団解決	<p>○考えた結果及びその考え方を発表する。</p> 
練り上げ	<p>○それぞれの考え方において、用いた図形の性質を確認する。</p> <p>○指導者は、生徒の発表になかった考え方も紹介する。</p> 
自力解決	<p>○課題②の意味を理解し、点Dの位置によってできる図を描く。</p> <p>○①と同様に、角の大きさについての関係を求める。</p>
集団解決	<p>○考えた結果及びその考え方を発表する。</p> <p>○①、②について比較をし、気付いたことを発表する。</p>
練り上げ まとめ	<p>○②のいろいろな考え方をまとめる。</p> <p>○課題を解くためには様々な方法があるということに気付き、数学的な見方や考え方のよさを実感する。</p>

(3) 補充的な学習

図形に対する直観的な見方や考え方に加えて、図形の性質を数学的な推論の方法で考察していく論理的な見方や考え方を身に付けることが第2学年の図形の学習では必要である。本課題での角の大きさを求める学習は第2学年の図形の学習における最初の部分であり、いろいろな角の大きさを求めていくことにより、図形に対する直観的な見方や考え方から、補助線をひくことや既習の図形の性質を基にして「数学的な見通し」をもちながら考えていく方法をいろいろと導き出したい。

- ・文字のまま考えるのが困難な生徒には具体的な数で考えさせる。  
本課題の四つの角 $\angle a$ 、 $\angle b$ 、 $\angle c$ 、 $\angle x$ が一般的に文字で表されていることによって理解が困難な生徒は、文字を具体的な数に変えた問題を考えたり実際に角の大きさを測定したりする。
- ・補助線の重要性を学習させる。  
問題解決の糸口がつかめないのは、必要な補助線を発見できないことによる場合が多い。図形の問題を考える上で、重要な働きをする補助線について考える。

(4) 発展的な学習

②において、3点A、B、Cを固定して点Dを動的にとらえることにより、図形を多角的にとらえることができるということを理解し、点Dを動かすことにより、変わる性質と変わらない性質があるという数学的な見方を身に付ける。

- ・星型多角形の角度を求める。  
本課題を発展させた内容のものとして、星型五角形等の星型多角形の角の大きさを求める問題を考える。
- ・コンピュータを活用する。  
図形の学習においては、コンピュータを活用することによって、楽しく学べる様々な学習形態が可能になる。また、図形を動的にとらえたり、様々な視点から考察したりすることが可能になることから、図形の性質についての多様な見方や考え方を深めることができる。コンピュータの積極的な活用を図りたい。

(5) 評価の観点

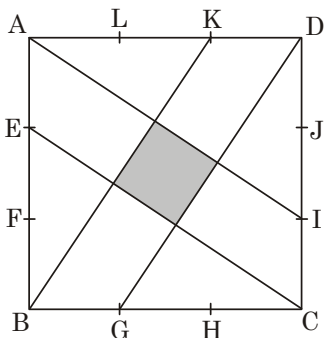
数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量、図形などについての知識・理解
<ul style="list-style-type: none"> <li>・図形の性質を利用して、未知の角の大きさを求めようとする</li> <li>・一つの問題に対して多様な考え方があることに興味をもつ。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・補助線を見いだす工夫をして、問題解決のための考察ができる。</li> <li>・問題解決において、多様な見方や考え方をすることのよさを感じる。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・三角形の内角や外角の性質、平行線の同位角と錯覚の性質等を利用して、角の大きさを求めたり、その方法を説明したりすることができる。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・三角形の内角の和が<math>180^\circ</math>であることや三角形の外角についての性質を理解している。</li> <li>・平行線の同位角や錯角についての性質を理解している。</li> </ul>

**【事例 7】** 第3学年 図形

(1) ねらい

- ①ある規則によって正方形の中にできる別の正方形の考察を通して、図形の中に潜む美しさを実感する。
- ②図形を切り貼りするという操作活動を通して、面積の関係を見いだす。
- ③一次関数や三平方の定理を利用する力を養う。

(2) 学習テーマ「正方形の面積を考えよう」

学習の流れ	学習活動と指導者の働きかけ
課題把握	<p>○課題を提示する。</p> <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> <p>右図のような正方形ABCDに4本の線分AI、EC、BK、GDをひくとき、中央にできる四角形の面積を求めましょう。</p> <p>ただし、E、Fは辺ABの3等分点、G、Hは辺BCの3等分点、I、Jは辺CDの3等分点、K、Lは辺DAの3等分点とします。</p> </div> 
集団解決	○課題の意味を把握し、中央にできる四角形がどのような図形かを考える。
自力解決	○中央にできる四角形が正方形であることを理解し、その理由を発表する。
	○既習の内容を思い出して、中央にできる正方形の面積を求める。
	○この課題を様々な方法で考える。
集団解決	○指導者は折り紙を用意しておき、折り紙を使いたい生徒にはそれを渡す。
	○考え方を班の中で発表する。
	○様々な方法があることに興味を持ち、意欲的に考える。
	○発表されたいくつかの考え方を整理し、理解する。
	○考え方のわからない班には、指導者が様々な方法（①折り紙を用いる方法、②三平方の定理を利用する方法等）についてのヒントを示し、生徒自身で考え方をを見つけるように示唆する。
練り上げ	○①折り紙を用いる方法、②三平方の定理を利用する方法について検討する。
まとめ	○様々な求め方や考え方があることを理解し、それぞれのよさを味わう。

(3) 補充的な学習

本課題は中学校における図形の学習をまとめるような課題であり、かなり難しいものである。このような課題になると、まったく解けない生徒も多くなってくる。

第3学年の図形の学習においては、第2学年までの図形についての数学的な推論に関する能力を伸ばし、図形について見通しをもって論理的に考察することができることを目標にしている。しかし、第3学年でのこのような課題に対しては、今まで学習した様々な知識を基にして考えようとするとき、「見通しをもって」考えることが困難になる場合がある。

従って、生徒がある課題を考えるとき、

- ◎個々の生徒がどの段階までの内容を理解し、どの段階までなら自分で解けるか。
- ◎個々の生徒に応じた教材は何か。
- ◎個々の生徒へのアドバイスやヒントとしてどのようなものがふさわしいか。

ということを指導者が把握し、一人一人の生徒が「見通しをもって」考えることができるようにすることが大切である。本課題において理解が困難な生徒に対しては、「見通しをもって」考えられるように、次のような工夫をしてみたい。

- ・折り紙を用いる。

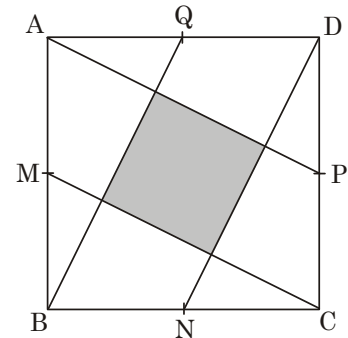
平面や空間における図形の性質や構成を考えると、観察、操作的な活動、実験のような直観的な取扱いをすることはどのような場合においても有効であり、このことによって図形の学習の基本に戻ることができる。本課題においても、折り紙を用いることによって、図形を直観的・具体

的にとらえることができ、考えるための見通しをもつことができるようになる。理解が困難な生徒には、できるだけ具体的な例示を考えていくことが大切である。

- ・課題の条件を簡単にする。

課題の条件を少なくすることによって課題を簡単にし、見通しをもちやすくした課題を考えさせる。例えば、次のような課題を考える。

正方形にひく4本の線分を、右図のように、各辺の2等分点(中点)と頂点とを結んだものにします。このとき、中央にできる四角形の面積を求めましょう。



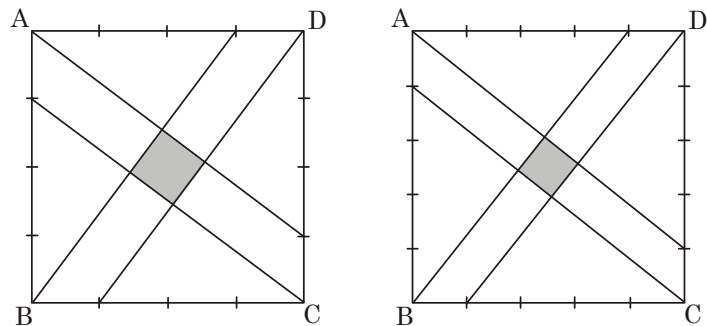
この課題が解決できたら、同じ見通しや考え方で最初の課題を解くことができることを実感させ、このような過程を経れば、数学の大切な考え方を身に付けさせることが十分できると考えられる。

#### (4) 発展的な学習

様々な解き方を考え、数学的な見方、おもしろさ、数学の奥深さを経験することにより、生徒の興味・関心を高めていきたい。

- ・関数を活用した解き方を考え、図形の問題を関数や代数の考え方で解けることを理解する。
- ・面積を求める方法として、相似の考え方を活用する。「面積比は相似比の2乗に等しい」という性質は高等学校に移行されたが、このような課題を通してこの性質を導いていくことができる。
- ・次の課題を考える。

右図のように、各辺の4等分点、5等分点を用いた場合の中央の四角形の面積を求めましょう。



- ・2等分点を用いた場合、4等分点を用いた場合の中央の四角形の面積が、それぞれもとの正方形の面積の $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{25}$ になる。このことから、8等分点を用いた場合の中央の四角形の面積がもとの正方形の面積の何倍になるかを考える。

発展的な課題においては、指導者がこのように様々な課題を準備することも大切であるが、生徒が自ら疑問を追求したり、自ら課題を見つけたりすることができるようにすることがより重要である。

#### (5) 評価の観点

数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な表現・処理	数量、図形などについての知識・理解
・数学的活動の楽しさや数学的に考えることよさを知り、それらを事象の考察に進んで活用しようとする。	・見通しをもち、数学的な推論の方法を活用して論理的に考察することができる。	・推論の筋道を簡潔に表現したり、図形の性質を計量に用いたりして、数学的に処理することができる。	・図形の相似や直角三角形などの性質、三平方の定理を理解している。