GRAPES によるアニメーションの作成

大阪府立岸和田高等学校
森下　宗一郎

要旨

数学のグラフソフト GRAPES を使用し、静止画やアニメーションを作成する。
具体的には振子やお手玉、ピカチュウやリフティングといったアニメーションを作成した。
現実の物理と対応させることは難しく、厳密性を問われるとあまり保証はできない。
しかし、数学だけを使ってこれらの現象または静止画を作成することに意義があると私は考える。視覚的に捉える楽しさはもちろん、世界を理解しようとする営みだからである。
この研究によって、現在数学に対して消極的な姿勢を示す人々が数学に対する興味を持ってくれることを願う。

ABSTRACT

I made pictures or animations with GRAPES, which is a software which is useful to make a mathematical graph.
I made animations such as pendulum, juggling, Pikachu, and football juggling.
It is difficult to make the animations correspond with real physics and I can’t guarantee that it is strict.
But I think it meaningful to translate these phenomena into pictures or animations in mathematics. After all, it is interesting to capture visually and I try to understand the world.
I hope this research make people who don’t like recently math be interested in math.

目的・着眼点

高校数学の「図形と方程式」という分野を主題にして、数学のグラフを使用し、静止画やアニメーションを表現する。
この研究は、将来ある現象を数学のみで記述する場合の参考になり得る。また、現在数学に対して消極的な姿勢を示す人々、特に学生に対し、数学の可能性、あわよくばその魅力を知ることが出きる。

この研究はあるホームページ（※1）を見て着想を得た。このページでは、キャラクターの「ドラえもん」が高校数学の範囲で使われるグラフで描かれている。私は、ここにあるパラメータを入れることで、静止画から動画にできそうだと思いついた。

使用させていただいたソフト

GRAPES　（※2）
（大阪教育大学が開発したフリーのグラフソフト）

作成手順（静止画）

1. 参考の画像があれば、GRAPES の機能にある「背景の貼り付け」を使用する。
2. 使用する図形の方程式を記述する。このとき、図形を規定する値（図形が一意に決まる）をパラメータにしておく。
   （例）
   円の方程式$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
   中心　(a,b)，半径　r の円
3. 背景の画像に合わせて、パラメータを設定する。具体的には、図形の平行移動、縮小拡大、変形を行う。
   （例）円の方程式の場合（上記）

$a=1$と代入されているパラメータに$a=2$を代入すると円の中心が正の x 軸方向に 1 平行移動する。

4. 1~3 を繰り返す。

作成手順（アニメーション）

1. 上記の手順で、静止画を作成。
2. 動かす要素をパラメータ、またはパラメータの関数でおく。動点の挙動は関数の種類、周期などによって変化する。研究では、動点の挙動が把握しやすい周期関数を多用した。
3. 動点を線で結ぶ場合、GRAPES の右クリックメニュー内の「点を結ぶ」を使用。
4. 1~3 を繰り返す。
5. パラメータを動かす。

作成結果

1. 振子（アニメーション）
   円の方程式に sin 関数を代入し、y について解いて陽関数表示にした。円の媒介変数表示にする方法もある。動点を中心とした円を描き、また動点と大きい円の中心を結ぶ。
   振子の内部に色を付けるため、領域を円の内部で表した。

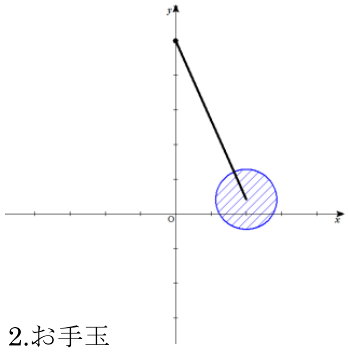
2. お手玉（アニメーション）
   円の媒介変数表示の y 成分の挙動を x 成分に対して大きくした。

3. ピカチュウ（静止画、アニメーション）
   耳は二次曲線やそれに絶対値を加えたもの、目、頬は領域を用いて赤や黒などの色がついた部分を表現した。

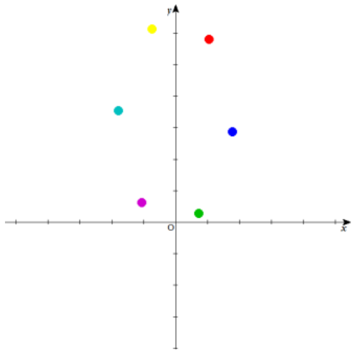
4. リフティング（アニメーション）
   すべての動点の周期を変えて、一つのパラメータで表した。
   ボールの動きは落体の動きを表現するために、体の動きは左右の体を別々で表現するために、それぞれ二次関数、cos 関数のフーリエ級数展開（大学範囲）を行った。
   腰を中心に体全体がリフティングの際に少し「ぶれる」ようにした。人間の動き方に近づくことができたと感じる。

使用した方程式は最後の補足で記述している。

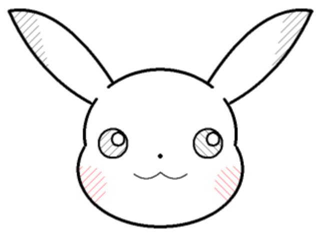
1.振子



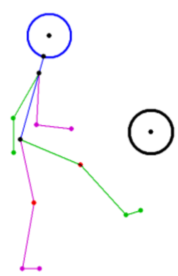
2.お手玉



3.ピカチュウ



4.リフティング



考察

物理で考えれば、例えば落体の運動は、

$$x = gt^2$$

と書けるように、位置が時間の 2 乗に比例し、二次関数で記述できるが、振子の運動はこの研究では sin 関数を円の方程式に代入しただけであり、実際の動きと同じだとは言えない。

もちろん、このような自己満足で終わるわけにはいかないが、擬似的に、とある現象を数学によって記述しようとしたことに意味があり、今後物理の分野とどの様に繋がるのかが楽しみである。今後の展望は、上記のように正確に物理と対応させて現象を記述することが目標である。特に力学の分野を深く学び、今後の研究に生かしたい。

また、今回は二次元での表現をしたが、三次元にこの分野を拡張したい。しかし、三次元での関数などは二次元から飛躍的に難易度が増加するため空間ベクトルが高校数学での主な武器となるだろう。今回の研究ではフーリエ級数展開や回転行列も勉強したが、大学範囲を学習する契機としてこの研究が役立てばうれしい。

結論

考察でも述べたように、数学を使ってとある現象を視覚的に表すことは可能であるが、厳密になるにつれて難易度は高くなる。
しかし未知を既知へと変えることは至上の喜びであり、この研究によって多くの人々が数学ないしは学問に興味を持ってくれることを願う。

引用文献・参考文献

※1　https://togech.jp/2015/04/13/22056

※2
http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/

1) ピカチュウの参考画像
http://guzome.com/

2) 高校数学の美しい物語
http://mathtrain.jp/

謝辞

最後になりましたが忙しい中ご指導を承りました、
物理科の西浦先生、
数学科の中村先生、林先生、渡部先生
友人の F 君
に深い感謝を申し上げます。

補足

注：数値は適当に設定した。必然性はない。

1. 振り子

（円の方程式に代入）

振り子の部分

$$(x-2\sin a)^2+\{y-(-\sqrt{(10-2\sin a)(10+2\sin a)}+10)\}^2 \leq 1.5^2$$

（円の媒介変数表示に代入）

振り子の中心

$$x=\cos(\sin x-\frac{\pi}{2})$$
$$y=\sin(\sin x-\frac{\pi}{2})$$

上記の $-\frac{\pi}{2}$ は振り子の部分を最下点で単振動させるためである。

2. お手玉

（玉一つ分の媒介変数表示）

$$x=9\cos t$$
$$y=16\sin t$$

お手玉を 6 つでする場合 $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ より

t にそれぞれ

$$t, \left(t-\frac{\pi}{3}\right), \left(t-\frac{2}{3}\pi\right), (t-\pi),$$

$$(t-\frac{4}{3}\pi), (t-\frac{5}{3}\pi)$$

を代入する。

3. ピカチュウ

・**顔**:楕円を組み合わせた。

$$\frac{x^2}{2.4^2}+\frac{(y-0.7)^2}{2.0^2}=1$$

$(0.34 \le y \le 1.8\ or\ 2.1 \le y)$:顔の上側

$$\frac{x^2}{2.6^2}+\frac{(y+0.4)^2}{1.8^2}=1 \quad (y \le 0.34)$$:顔の下側

・**耳**:楕円と放物線を組み合わせた。

$$\frac{x^2}{5.4^2}+\frac{(y-7.5)^2}{6.4^2}=1$$:耳の下側

$$-0.26(|x|-4.45)^2+4.55$$

$$(-4.8 \le x \le -1.5\ or\ 1.5 \le x \le 4.8)$$

:耳の上側（放物線を y 軸対称移動した）

$$\left(\frac{x^2}{4.2^2}+\frac{(y-7.5)^2}{8.6^2}>1\right)$$

$$and(y<-0.26(|x|-4.45)^2\ +4.55)$$

$$and\left(\frac{x^2}{5.4^2}+\frac{(y-7.5)^2}{6.4^2}<1\right)$$

:耳の内側

・**左頬**（赤）

$$\left(\frac{(x-2.3)^2}{0.6^2}+\frac{(y+0.9)^2}{0.6^2}<1\right)$$

$$and\left(\frac{x^2}{2.6^2}+\frac{(y+0.4)^2}{1.8^2}<1\right)$$

・**左目**:円の内側とその内部の円の外側の領域を使った。

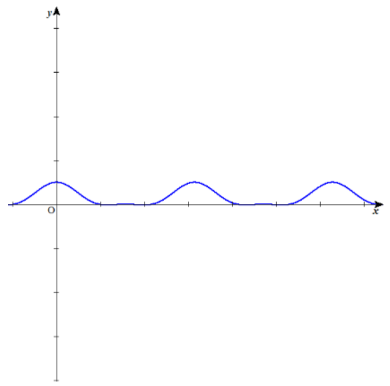
$$-\left(x-0.15\sqrt{2}\cos(0.8\sin(a)-4.8)-1.5\right)^2$$
$$+0.2^2$$
$$+2\left(0.15\sqrt{2}\sin(0.8\sin(a)-4.8)+0.4\right)y$$
$$-\left(0.15\sqrt{2}\sin(0.8\sin(a)-4.8)+0.4\right)^2-1.1y$$
$$\le y^2-\ 1.1y$$
$$\le -(x-1.5)^2+0.45^2-0.4^2-0.3y$$

・**口**:2 次関数の放物線を y 軸対称移動した。

$$(|x|-0.45)^2-0.7(-0.85 \le x \le 0.85)$$

4. リフティング

全体のアニメーションをひとつの変数で表す。
まず、下のような関数を求める。
このような関数を使用することで、膝の動きを表す。



以下の条件を満たせばよい。

① 膝が動かないとき→値は 0 をとる

② 膝が動くとき→増加した後、減少する

この関数を、フーリエ級数展開を用いて求めた。近似になるが、ある程度合わせられれば十分だと考えた。
（ほかには、ガウス記号を用いて余弦関数を用いるのもあるが、滑らかに表現するにはこちらが適当だと考えた。）

今回求めた関数は以下のとおり。

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos x$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{m}\{\frac{2\sin\frac{(1+n)\pi}{2}}{1-n^2}\cos nx\}$$

この関数を円の媒介変数表示に代入する。

$$(\frac{3}{2}\cos\{-\frac{\pi}{2}+f(x)+0.2\},\frac{3}{2}\sin\{-\frac{\pi}{2}+f(x)+0.2\})$$

腰を原点として、膝の周期に合わせて、手や顔、足を付け加えていく。
それぞれの点が表せたら、「線でつなぐ」という機能を使って棒人間にする。

●足（膝以外）

・かかと

$$(3\cos[\frac{3\pi}{10}\{-1+f(x)\}-\frac{\pi}{5}]+0.4,3\sin[\frac{3\pi}{10}\{-1+f(x)\}-\frac{\pi}{5}]+0.4)$$

・つま先

$(3\cos[\frac{3\pi}{10}\{-1+f(x)\}-\frac{\pi}{5}]+0.4, 3\sin[\frac{3\pi}{10}\{-1+f(x)\}-\frac{\pi}{5}]+0.4)$

●首（点 P とする）

$(2\cos\{\frac{9\pi}{20}-\frac{f(2x)}{7}\}, 2\sin\{\frac{9\pi}{20}-\frac{f(2x)}{7}\})$

片足が 1 回動くごとに上半身は 1 回動くから、上半身の周期は片足の2倍である。

●頭

中心$(\frac{5}{4}\overrightarrow{OP})$, 半径$(\frac{1}{4}|\overrightarrow{OP}|)$の円

延長線上にある点はベクトルを使えば容易に表せる。

●腕

・肩

$\frac{4}{5}\overrightarrow{OP}$

・肘（点 Q とする）

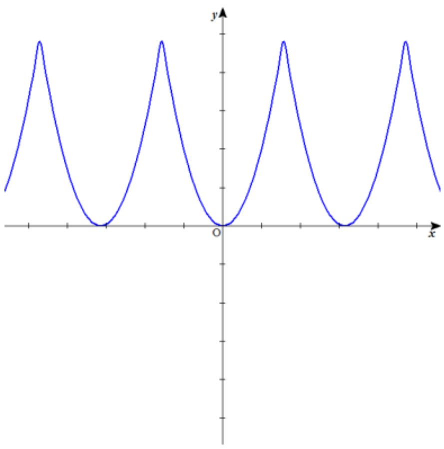
$\frac{4}{5}\overrightarrow{OP}+1.2(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{f(x)}{2}\right), \sin\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{f(x)}{2}\right))$

・手

$\overrightarrow{OQ}+0.8(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+1.5f(x)\right), \sin\left(-\frac{\pi}{2}+1.5f(x)\right))$

●ボール

まず下のような関数を考える。



求め方は上記と同様にする。関数は

$$g(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{m}\{(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx\}$$

となる。これを x 軸に関して対象移動させる。すると連続で蹴り上げられる

ボールのような動きを表すことができる。ボールを表す式は

中心$\left(3,-1+\frac{1}{3}\{-g(2x-\pi)+\pi^2\}\right)$,

半径 0.5 の円

となる。