有名問題	2次方程式の解の分離の問題	参考：サクシード 数学Ⅰ p.48 重要例題74 （チャートW 数学Ⅰ p.157 基本例題106）

x の2次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$ が、次の条件を満たす解をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。

(1) 1より大きい異なる2つの解をもつ。

(2) 1より大きい解と、1より小さい解をもつ。

(3) 少なくとも1つ、1より大きい解をもつ。

《解答》

$f(x)=x^2-2ax+a+2=(x-a)^2-a^2+a+2$ とおく。

① 頂点の y 座標 $q=-a^2+a+2=-(a+1)(a-2)$　② 軸の方程式 $x=a$

③ 関数値 $f(1)=-a+3$

(1) ① $q<0$　$(a+1)(a-2)>0$　$\therefore\ a<-1,\ 2<a$

② $a>1$

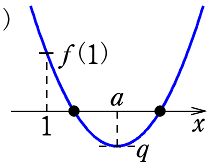
③ $f(1)=-a+3>0$　$\therefore\ a<3$

①～③より、$2<a<3$ …（答）

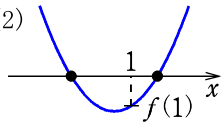
(2) ③ $f(1)=-a+3<0$

$\therefore\ 3<a$ …（答）

(1)



(2)



(3) [ア] 実数解を2つもつ場合（(1)と同じ）

① $q<0$　$(a+1)(a-2)>0$

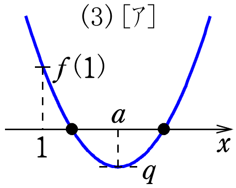
$\therefore\ a<-1,\ 2<a$

② $a>1$

③ $f(1)=-a+3>0$　$\therefore\ a<3$

①～③より、$2<a<3$

(3) [ア]

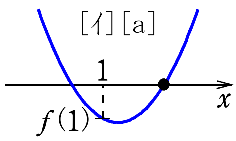


[イ] 実数解を1つもつ場合

[a] ③ $f(1)=-a+3<0$

$\therefore\ 3<a$

[イ][a]



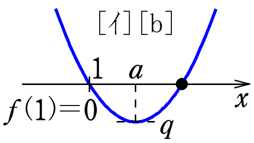
[b] ③ $f(1)=-a+3=0$

$\therefore\ a=3$

② $a>1$

③, ②より、$a=3$

[イ][b]



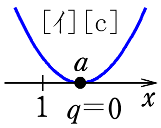
[c] ① $q=0$　$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-1,\ 2$

② $a>1$

①, ②より、$a=2$

[イ][c]



[ア]と[イ]の[a]、[b]、[c]より、$a\geqq 2$ …（答）

㊟ $q<0$ の代わりに、判別式 $\dfrac{D}{4}=a^2-a-2=(a+1)(a-2)>0$ を用いてもよい。

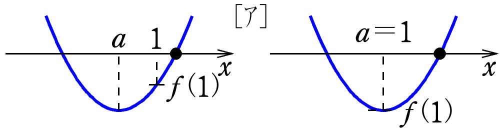
《別法１》［軸の位置で場合分け］

［ア］② $a\leqq 1$ のとき

③ $f(1)=-a+3<0$

$\therefore\ 3<a$

よって、解なし

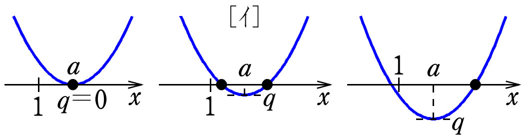


［イ］② $a>1$ のとき

① $q\leqq 0$　　$(a+1)(a-2)\geqq 0$

$\therefore\ a\leqq -1,\ 2\leqq a$

よって、$2\leqq a$



［ア］､［イ］より、$a\geqq 2$ …（答）

《別法２》［関数値 $f(1)$ の符号で場合分け］

［ア］$f(1)=-a+3\geqq 0$

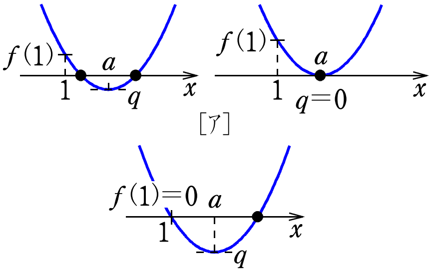
すなわち、$a\leqq 3$ のとき

① $q\leqq 0$　　$(a+1)(a-2)\geqq 0$

$\therefore\ a\leqq -1,\ 2\leqq a$

② $a>1$

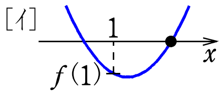
条件と①, ②より、$2\leqq a\leqq 3$



［イ］$f(1)=-a+3<0$

すなわち、$3<a$ のとき

1より大きい実数解がちょうど1つある。



［ア］､［イ］より、$a\geqq 2$ …（答）

㊟《別法１, ２》では、$q\leqq 0$ の代わりに、判別式 $\dfrac{D}{4}=a^2-a-2=(a+1)(a-2)\geqq 0$ を用いてもよい。

《別解１》

判別式 $\dfrac{D}{4}=a^2-a-2=(a+1)(a-2)\geqq 0$ より、$a\leqq -1,\ 2\leqq a$

このとき、$x^2-2ax+a+2=0$ の解を α,β（$\alpha\leqq\beta$）とおくと

解と係数の関係より、$\alpha+\beta=2a,\ \ \alpha\beta=a+2$ となる。

また、$(\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=2(a-1)$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=a+2-2a+1=-a+3$

(1)　$\dfrac{D}{4}>0$ かつ $\alpha>1$ かつ $\beta>1$

$\Leftrightarrow\ \ a<-1,\ 2<a$ かつ $(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ かつ $(\alpha-1)(\beta-1)>0$

$\Leftrightarrow\ \ a<-1,\ 2<a$ かつ $a>1$ かつ $a<3$

（答）$2<a<3$

(2) $\dfrac{D}{4}>0$ かつ $\alpha<1<\beta$ $\iff$ $a<-1,\ 2<a$ かつ $(\alpha-1)(\beta-1)<0$

$\iff$ $a<-1,\ 2<a$ かつ $a>3$

（答）$a>3$

(3) ［ｱ］$1<\alpha\leqq\beta$ のとき、$\dfrac{D}{4}\geqq0$ かつ $\alpha>1$ かつ $\beta>1$

$\iff$ $a\leqq-1,\ 2\leqq a$ かつ $(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ かつ $(\alpha-1)(\beta-1)>0$

$\iff$ $a\leqq-1,\ 2\leqq a$ かつ $a>1$ かつ $a<3$

よって、$2\leqq a<3$

［ｲ］$\alpha=1<\beta$ のとき（$a=3$ のとき）、$\dfrac{D}{4}>0$ かつ $\alpha=1$ かつ $\beta>1$

$\iff$ $a<-1,\ 2<a$ かつ $(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ かつ $(\alpha-1)(\beta-1)=0$

$\iff$ $a<-1,\ 2<a$ かつ $a>1$ かつ $a=3$

よって、$a=3$

［ｳ］$\alpha<1<\beta$ のとき、$\dfrac{D}{4}>0$ かつ $\alpha<1$ かつ $\beta>1$

$\iff$ $a<-1,\ 2<a$ かつ $(\alpha-1)(\beta-1)<0$

$\iff$ $a<-1,\ 2<a$ かつ $a>3$

よって、$a>3$

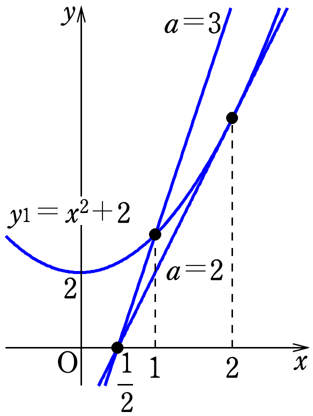
［ｱ］～［ｳ］より、$a\geqq2$ …（答）

《別解２》

与式より、$a(2x-1)=x^2+2$

$y_1=a(2x-1)$，$y_2=x^2+2$ の２つのグラフを考える。

y_1 のグラフは、点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通る傾き $2a$ の直線である。



y_1 のグラフと y_2 のグラフが接するのは

与式の判別式 $\dfrac{D}{4}=a^2-a-2=(a+1)(a-2)=0$ より

$a=-1,\ 2$ のときである。

$a=2$ のときの接点の x 座標は

与式 $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ より、$x=2$

また、y_2 のグラフ上の点 $(1,\ 3)$ を

y_1 のグラフが通るのは

$3=a(2\cdot1-1)$ より、$a=3$ のときである。

よって、右図より、２つのグラフの共有点の x 座標を見て

（答）(1) $2<a<3$　　(2) $3<a$　　(3) $a\geqq2$

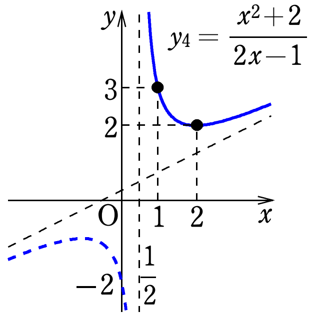
《別解３》（数学Ⅲ）
与式より、$a(2x-1)=x^2+2$

$x\neq\dfrac{1}{2}$ であるので、$a=\dfrac{x^2+2}{2x-1}$　　$y_3=a$，$y_4=\dfrac{x^2+2}{2x-1}$ $\left(=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4(2x-1)}\right)$

の２つのグラフを考える。

$$y_4{}'=\frac{2x(2x-1)-(x^2+2)\cdot 2}{(2x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2}=\frac{2(x+1)(x-2)}{(2x-1)^2}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$y_4{}'$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y_4	$\nearrow$		$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$		$\nearrow$



よって、右図より
２つのグラフの共有点の x 座標をを見て
（答）(1)　$2<a<3$　　(2)　$3<a$　　(3)　$a\geqq 2$

《解説》
(3)の《解答》では、１より大きい実数解の個数で場合分けをした。この場合分けは、すべての場合をきちんと考えるのが難しい。場合分けを１つくらい落としても答えが合っていることもある。それに比べて、《別法１》、《別法２》の方が考え易い。
(4)の《別法１》は、軸の位置で場合分けをする、すなわち、$a<1$, $a=1$, $a>1$ の３通りで場合分けするのであるが、$a<1$, $a=1$ の場合はまとめることができるので
［ｱ］$a\leqq 1$、［ｲ］$a>1$ という場合分けになっている。
(4)の《別法２》は、$f(1)$の符号で場合分けする、すなわち
$f(1)>0$, $f(1)=0$, $f(1)<0$ の３通りで場合分けするのであるが、$f(1)>0$, $f(1)=0$ の場合はまとめることができるので、［ｱ］$f(1)\geqq 0$、［ｲ］$f(1)<0$ という場合分けになっている。

《別解１》は、解と係数の関係と判別式を用いて論理的に解いて行く解法である。
問題文の題意をきちんと同値な条件に表現する必要がある。どちらかと言うと、《解答》の方が分かりやすい。
《解答》と《別解１》に関しては、次の「**【参考】２次方程式の解の分離の問題**」も参照しよう。

《別解２》、《別解３》のグラフをうまく利用する解法もある。これらの解法の方が、《解答》、《別法１》、《別法２》等に比べて、早くて無駄がなく解法は考えやすい。
これは、《別解２》では定数 a を傾きに関連した１つの値として捉えた、また、《別解３》では定数 a を分離した、おかげでもある。

【参考】２次方程式の解の分離の問題

２次方程式の解の分離の問題：実数係数の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）の２つの実数解の符号、または実数 k との大小に関する問題
この問題には、次の (1), (2) の２種類の解法がある。

（1）２次関数のグラフを利用する解法

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a>0$）に関する解の分離の問題を
２次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ のグラフ（下に凸の放物線）を利用して解く。
（$a<0$ のときは、上に凸の放物線を利用）

この２次関数を変形して、$f(x)=a(x-p)^2+q$

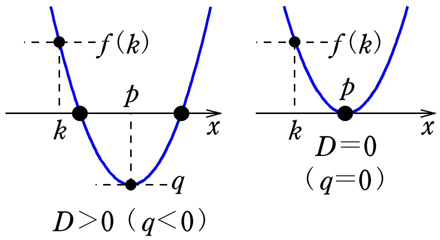
$$\left.\begin{array}{l} \text{① 判別式 } D=b^2-4ac \text{（頂点の } y \text{ 座標 } q\text{）} \\ \text{② 軸 } x=p \text{ の位置} \\ \text{③ } x=k \text{ における関数値 } f(k) \text{ の正負} \end{array}\right\} \text{に着目}$$

代表的な問題は、
次の [1], [2], [3] である。

[1] ２つの実数解ともkより大（重解である場合も含む。）

$$\left\{\begin{array}{l} \text{①}\ D\geqq0\quad(q\leqq0) \\ \text{②}\ p>k \\ \text{③}\ f(k)>0 \end{array}\right.$$

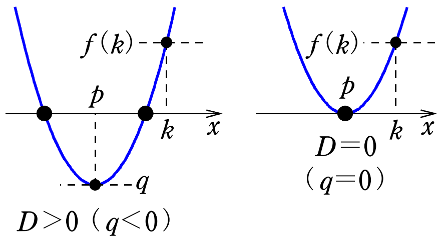
[1]



[2] ２つの実数解ともkより小（重解である場合も含む。）

$$\left\{\begin{array}{l} \text{①}\ D\geqq0\quad(q\leqq0) \\ \text{②}\ p<k \\ \text{③}\ f(k)>0 \end{array}\right.$$

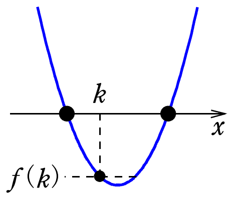
[2]



[3] １つの実数解が k より大
他の実数解が k より小

③ $f(k)<0$

[3]



注 (ｱ) [1],[2] の２つの実数解で、
重解である場合を除くときは（異なる２つの実数解のとき）、判別式の条件 ① $D\geqq0$（$q\leqq0$）を、①’ $D>0$（$q<0$）に代えればよい。

(ｲ) [1], [2] で $k=0$ のときは、[1] は、２つの実数解とも正、[2] は、２つの実数解とも負の場合になる。

(2) 判別式と解と係数の関係を利用する解法

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) の2つの実数解(重解である場合も含む)を α, β ($\alpha<\beta$)、判別式を D とする。

この2次方程式に関する解の分離の問題を、判別式と解と係数の関係を利用して、解く。代表的な問題は、次の [1], [2], [3], [4] である。

[1] 2つの実数解 α, β とも正 (負)

$$\alpha>0,\ \beta>0 \iff \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0,\ D\geqq0$$
$$\left(\alpha<0,\ \beta<0 \iff \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0,\ D\geqq0\right)$$

[2] 1つの実数解 α が負、他の実数解 β が正 (2つの実数解 α, β が異符号)

$$\alpha<0<\beta\ (\beta<0<\alpha) \iff \alpha\beta<0,\ (D>0 \text{は不要})$$

[3] 2つの実数解 α, β とも k より大 (小)

$$\begin{aligned}\alpha>k,\ \beta>k &\iff \alpha-k>0,\ \beta-k>0\\ &\iff (\alpha-k)+(\beta-k)>0,\ (\alpha-k)(\beta-k)>0,\ D\geqq0\\ &\iff \alpha+\beta-2k>0,\ \alpha\beta-k(\alpha+\beta)+k^2>0,\ D\geqq0\end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned}\alpha<k,\ \beta<k &\iff \alpha-k<0,\ \beta-k<0\\ &\iff (\alpha-k)+(\beta-k)<0,\ (\alpha-k)(\beta-k)>0,\ D\geqq0\\ &\iff \alpha+\beta-2k<0,\ \alpha\beta-k(\alpha+\beta)+k^2>0,\ D\geqq0\end{aligned}\right)$$

[4] 1つの実数解 α が k より大、他の実数解 β が k より小

$$\begin{aligned}\alpha<k<\beta &\iff \alpha-k<0,\ \beta-k>0\\ &\iff (\alpha-k)(\beta-k)<0,\ (D>0 \text{は不要})\\ &\iff \alpha\beta-k(\alpha+\beta)+k^2<0,\ (D>0 \text{は不要})\end{aligned}$$

これらの式に、判別式 $D=b^2-4ac$

解と係数の関係 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ を代入して解く。

注 (ｱ) [3], [4] はそれぞれ、[1], [2] の考え方を利用して、条件を変形している。
逆に、[3], [4] で $k=0$ の場合がそれぞれ、[1], [2] である。

(ｲ) [1], [3] の2つの実数解で、重解である場合を除くときは
(異なる2つの実数解のとき)
判別式の条件 $D\geqq0$ を、$D>0$ に代えればよい。