

有名
問題文字係数の
連立方程式

a は定数とする。 x の連立方程式 $\begin{cases} ax+4y=6 \\ x+ay=2a-1 \end{cases}$ を解け。

《解答》

$$ax+4y=6 \cdots \textcircled{1}, \quad x+ay=2a-1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times a - \textcircled{2} \times 4 \quad (a^2-4)x=6a-4(2a-1) \quad (a+2)(a-2)x=-2(a-2) \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times a \quad (4-a^2)y=6-(2a-1)a \quad -(a+2)(a-2)y=-2a^2+a+6$$

$$(a+2)(a-2)y=(2a+3)(a-2) \cdots \textcircled{4}$$

[1] $a=-2$ のとき、 $\textcircled{3}$ より、 $0 \cdot x=8$ 、 $\textcircled{4}$ より、 $0 \cdot y=4$ よって、解なし

[2] $a=2$ のとき、 $\textcircled{3}$ より、 $0 \cdot x=0$ 、 $\textcircled{4}$ より、 $0 \cdot y=0$

このとき、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ は、同じ方程式 $x+2y=3$ になる。

よって、解は、 $x+2y=3$ を満たすすべての実数 x, y

[3] $a \neq \pm 2$ のとき、 $\textcircled{3}$ より $x = -\frac{2}{a+2}$ 、 $\textcircled{4}$ より $y = \frac{2a+3}{a+2}$

《別法》(途中から)

[1] $a=-2$ のとき、 $\textcircled{3}$ より、 $0 \cdot x=-8$ よって、解なし

[2] $a=2$ のとき、 $\textcircled{3}$ より、 $0 \cdot x=0$

このとき、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ は、同じ方程式 $x+2y=3$ になる。

よって、解は、 $x+2y=3$ を満たすすべての実数 x, y

[3] $a \neq \pm 2$ のとき、 $x = -\frac{2}{a+2}$ このとき、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}(6-ax) = \frac{1}{4} \left\{ 6 - a \left[-\frac{2}{a+2} \right] \right\} \\ &= \frac{6(a+2)+2a}{4(a+2)} = \frac{4(2a+3)}{4(a+2)} = \frac{2a+3}{a+2} \end{aligned}$$

《別解1》(途中まで)

直線 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が平行(一致を含む)となるのは、 $a \cdot a - 4 = 0$ ($a:4=1:a$) より $(a+2)(a-2)=0$ のときである。

よって、この連立方程式がただ1つ解をもつのは、 $a \neq \pm 2$

[1] $a=-2$ のとき、 $x-2y=-3 \cdots \textcircled{1}$ 、 $x-2y=-5 \cdots \textcircled{2}$ で

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ は、2本の平行な直線になる。(共有点なし)

よって、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の連立方程式の解はない。

[2] $a=2$ のとき、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ は、同一の直線 $x+2y=3$ になる。

よって、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の連立方程式の解は

$x+2y=3$ を満たすすべての実数 x, y

(以下《解答》と同じ)

《別解2》(数学C 途中まで)

与えられた連立方程式を行列で表すと、 $\begin{pmatrix} a & 4 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2a-1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ とおくと、 $\det A = a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$

[1] $\det A \neq 0$ 、すなわち、 $a \neq \pm 2$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 2a-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(a+2)(a-2)} \begin{pmatrix} a & -4 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2a-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(a+2)(a-2)} \begin{pmatrix} 6a-4(2a-1) \\ -6+a(2a-1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(a+2)(a-2)} \begin{pmatrix} -2(a-2) \\ (2a+3)(a-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{a+2} \\ \frac{2a+3}{a+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[2] $\det A = 0$ 、すなわち、 $a = \pm 2$ のとき

(以下《解答》と同じ)

《解説》

《解答》では、連立方程式を解くため、 x, y を消去して考えた。「[3] $a \neq \pm 2$ のとき」では、連立方程式を加減法で解いた。《別法》では、連立方程式を代入法で解いた。どちらかと言うと、加減法の方が x, y の解が同時に出てくるので解きやすいように思う。また、この解法に関しては、下記の「【参考】文字係数の(1次)方程式」を参照しよう。《別解1》のように、①、②の方程式を、直線と捉える解法もある。

《別解1》の「[3] $a \neq \pm 2$ のとき」は省略したが、《解答》または《別法》のように計算しなければならない。実は、《解答》または《別法》でも、①、②の方程式を直線と捉えて考えながら、解くのがよい。

《別解2》は数学Cの行列を用いた解法である。逆行列の存在を意識しながら解いている。そのことによって全体が見渡せる解法でもある。

いずれの場合にも、 $a = \pm 2$ のときは、①、②の方程式を直線と捉えて考えるのがよい。実は、《解答》はこの《別解2》を意識した解法となっている。

【参考】文字係数の(1次)方程式

x の方程式 $px = q \cdots \textcircled{A}$ の解 (p, q は定数)

$$\left\{ \begin{array}{l} p \neq 0 \text{ の場合、} x = \frac{q}{p} \text{ (} px = q \text{ は1次方程式)} \\ p = 0 \text{ の場合} \left\{ \begin{array}{l} q = 0 \text{ のとき、} \textcircled{A} \text{ は } 0 \cdot x = 0 \text{ で、解はすべての数 (不定)} \\ q \neq 0 \text{ のとき、} \textcircled{A} \text{ は } 0 \cdot x = q \text{ で、解なし (不能)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

③ 0 で割ることは出来ないので、 $p \neq 0$ 、 $p = 0$ の場合分けが必要となる。