有名問題	空間ベクトルの関係式と点の存在範囲	類題：サクシード 数学B $p.149$ **234**

四面体OABCがある。実数 $r,\ s,\ t$ が次の条件を満たすとき、
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表される点Pの存在範囲をいえ。

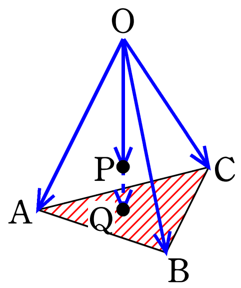
(1) $r+s+t<1$
　$r>0,\ s>0,\ t>0$

(2) $6r+4s+9t=6$
　$r\geqq 0,\ s\leqq 0,\ t\leqq 0$

(3) $r+s+t=\dfrac{1}{2}$
　$r\leqq 0,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$

(1)

《解答1》



$r+s+t=k$ とおくと、与えられた条件より、$0<k<1$

与式より、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\cdot\left(\dfrac{r}{k}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{r}{k}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{r}{k}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$

$\dfrac{r}{k}=r'$，$\dfrac{s}{k}=s'$，$\dfrac{t}{k}=t'$ とおくと、$r'>0,\ s'>0,\ t'>0$ で

$$r'+s'+t'=\frac{r+s+t}{k}=1$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=r'\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s'\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=-r'\overrightarrow{\mathrm{AO}}+s'\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)+t'\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=s'\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ （$\because$ $r'+s'+t'=1$）で、$s'+t'=1-r'<1$，$s'>0,\ t'>0$
であるので、点Qは三角形ABCの内部にある。

さらに、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$0<k<1$ であるので、点Pは、両端（2点O，Q）を除いた線分OQ上にある。よって、点Pは四面体OABCの内部にある。

逆に、四面体OABCの内部の点Pに対して、直線OPと三角形ABCの交点をQとすると、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$0<k<1$ を満たす実数 k が存在する。また、点Qは三角形ABCの内部にあるので、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=s'\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$s'+t'<1$，$s'>0,\ t'>0$ を満たす
実数 s'，t' が存在する。

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s'\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t'\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-s'-t')\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s'\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(1-s'-t')\overrightarrow{\mathrm{OA}}+ks'\overrightarrow{\mathrm{OB}}+kt'\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

ここで、$k(1-s'-t')=r$，$ks'=s$，$kt'=t$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で

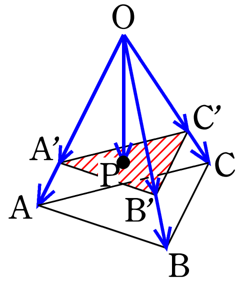
$r+s+t=k(1-s'-t'+s'+t')=k<1$，$r>0,\ s>0,\ t>0$ となる。

したがって、点Pの存在範囲は、四面体OABCの内部である。

《解答2》

$r+s+t=k$ とおくと、与えられた条件より、$0<k<1$

与式より、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{r}{k}\cdot k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{s}{k}\cdot k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{t}{k}\cdot k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$



$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$, $k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$, $k\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ とおくと

$0<k<1$ であるので

点A'は、端点（2点O, A）を除いた線分OA上に

点B'は、端点（2点O, B）を除いた線分OB上に

点C'は、端点（2点O, C）を除いた線分OC上にある。

さらに、$\dfrac{r}{k}=r'$, $\dfrac{s}{k}=s'$, $\dfrac{t}{k}=t'$ とおくと

$r'+s'+t'=\dfrac{r+s+t}{k}=1$, $r'>0$, $s'>0$, $t'>0$ で、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+s'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$

より、$\overrightarrow{\mathrm{A'P}}-\overrightarrow{\mathrm{A'O}}=r'\left(-\overrightarrow{\mathrm{A'O}}\right)+s'\left(\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}-\overrightarrow{\mathrm{A'O}}\right)+t'\left(\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}-\overrightarrow{\mathrm{A'O}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{A'P}}=s'\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$　（$\because$　$r'+s'+t'=1$）で、$s'+t'=1-r'<1$, $s'>0$, $t'>0$ であるので、点Pは三角形A'B'C'の内部にある。

よって、点Pは四面体OABCの内部にある。

逆に、四面体OABCの内部の点Pに対して、点Pを通る平面ABCと平行な平面と線分OA, OB, OCとの交点をそれぞれA', B', C'とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $0<k<1$ を満たす実数kが存在する。

また、点Pは三角形A'B'C'の内部にあるので

$\overrightarrow{\mathrm{A'P}}=s'\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$, $s'+t'<1$, $s'>0$, $t'>0$ を満たす実数s', t'が存在する。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=s'\left(\overrightarrow{\mathrm{OB'}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)+t'\left(\overrightarrow{\mathrm{OC'}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s'-t')\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+s'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=(1-s'-t')k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s'k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t'k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

ここで、$(1-s'-t')k=r$, $s'k=s$, $t'k=t$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $r+s+t=(1-s'-t'+s'+t')k=k<1$

$r>0$, $s>0$, $t>0$ となる。

したがって、点Pの存在範囲は、四面体OABCの内部である。

《別解1》

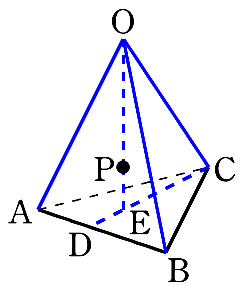
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(r+s)\cdot\dfrac{r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{r+s}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　　$\dfrac{r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{r+s}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ …① とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(r+s)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

さらに、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(r+s+t)\cdot\dfrac{(r+s)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{(r+s)+t}$

$\dfrac{(r+s)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{(r+s)+t}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ …② とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(r+s+t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ …③



①より、点Dは辺ABを $s:r$ の比に内分する点で

②より、点Eは線分CDを $(r+s):t$ の比に内分する点で

③より、点Pは線分OEを $(r+s+t):\{1-(r+s+t)\}$ の比に内分する点である。

よって、点Pは、四面体ABCDの内部にある。

逆に、四面体OABCの内部の点Pに対して、直線OPと平面ABCの交点をEとし直線CEと辺ABの交点をDとすると

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OE}=(1-l)\overrightarrow{OC}+l\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OD}=(1-s')\overrightarrow{OA}+s'\overrightarrow{OB}$

$0<k<1$，$0<l<1$，$0<s'<1$ を満たす実数k, l, s'が存在する。

$$\overrightarrow{OP}=k(1-l)\overrightarrow{OC}+kl(1-s')\overrightarrow{OA}+kls'\overrightarrow{OB}$$

$k(1-l)=t$，$kl(1-s')=r$，$kls'=s$ とおくと、$\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$ で

$r+s+t=kl(1-s')+kls'+k(1-l)=k<1$，$r>0$, $s>0$, $t>0$

したがって、点Pの存在範囲は、四面体OABCの内部である。

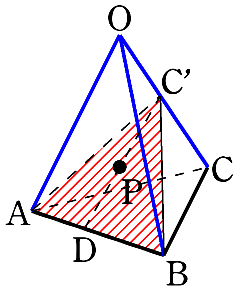
《別解2》

$\overrightarrow{OP}=(r+s)\cdot\dfrac{r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}}{r+s}+t\overrightarrow{OC}$　　$\dfrac{r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}}{r+s}=\overrightarrow{OD}$ … ① とおくと

$\overrightarrow{OP}=(r+s)\cdot\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OC}=(r+s)\cdot\overrightarrow{OD}+\{1-(r+s)\}\cdot\dfrac{t}{1-(r+s)}\overrightarrow{OC}$

さらに、$\overrightarrow{OC'}=\dfrac{t}{1-(r+s)}\overrightarrow{OC}$ … ② とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(r+s)\cdot\overrightarrow{OD}+\{1-(r+s)\}\cdot\overrightarrow{OC'} \quad \cdots ③$$



①より、点Dは辺ABを $s:r$ の比に内分する点で
②より、点C'は線分OC上の内分点で
③より、点Pは線分C'Dを $(r+s):\{1-(r+s)\}$ の比に内分する点である。
よって、点Pは、四面体ABCDの内部にある。

逆に、四面体OABCの内部の点Pに対して、平面PABと辺OCの交点をC'とし直線PC'と辺ABの交点をDとすると

$\overrightarrow{OC'}=t'\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}=(1-s')\overrightarrow{OA}+s'\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}=(1-k)\overrightarrow{OC'}+k\overrightarrow{OD}$

$0<t'<1$，$0<s'<1$，$0<k<1$ を満たす実数t', s', kが存在する。

$\overrightarrow{OP}=(1-k)t'\overrightarrow{OC}+k(1-s')\overrightarrow{OA}+ks'\overrightarrow{OB}$

$(1-k)t'=t$，$k(1-s')=r$，$ks'=s$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$ で

$r+s+t=k(1-s')+ks'+(1-k)t'<k+(1-k)=1$，$r>0$, $s>0$, $t>0$

したがって、点Pの存在範囲は、四面体OABCの内部である。

(2)
《解答》

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2s}{3}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3t}{2}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　　$\frac{2}{3}s=s'$, $\frac{3}{2}t=t'$ とおくと

$s'\leqq 0,\ t'\leqq 0 \cdots$ ①, $r+s'+t'=r+\frac{2}{3}s+\frac{3}{2}t=\frac{6r+4s+9t}{6}=1$

また、$\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ とおくと

点B′は、辺OBを 3 : 1 に外分する点、点C′は、辺OCを 2 : 1 に内分する点であり

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=r'\left(-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)+s'\left(\overrightarrow{\mathrm{AB'}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)+t'\left(\overrightarrow{\mathrm{AC'}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s'\overrightarrow{\mathrm{AB'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$　($\because$ $r'+s'+t'=1$)

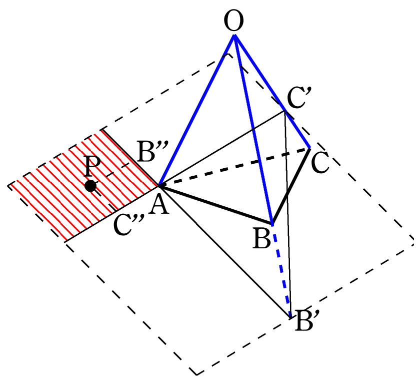
また、$r'\geqq 0$ より、$1-(s'+t')\geqq 0$　　$\therefore$ $s'+t'\leqq 1 \cdots$ ②

①, ②より、$s'\leqq 0,\ t'\leqq 0$

$s'\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=\overrightarrow{\mathrm{AB''}}$, $t'\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\overrightarrow{\mathrm{AC''}}$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB''}}+\overrightarrow{\mathrm{AC''}}$

よって、点Pは、平面AB′C′上の右図の斜線部(境界を含む。)に存在する。



逆に、点Pが、平面AB′C′上の右図の斜線部(境界を含む。)に存在すれば
点Pを通り直線AC′と平行な直線と線分AB′の交点をB″
点Pを通り直線AB′と平行な直線と線分AC′の交点をC″とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB''}}+\overrightarrow{\mathrm{AC''}}$ で、$\overrightarrow{\mathrm{AB''}}=s'\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC''}}=t'\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$, $s'\leqq 0,\ t'\leqq 0$ を満たす実数 s', t' が存在する。

(点Pが直線AB′上のときは、PとB″は一致し、$t'=0$
点Pが直線AC′上のときは、PとC″は一致し、$s'=0$)

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s'\overrightarrow{\mathrm{AB'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s'\left(\overrightarrow{\mathrm{OB'}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t'\left(\overrightarrow{\mathrm{OC'}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s'-t')\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるので

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s'-t')\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3s'}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2t'}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$1-s'-t'=r$, $\frac{3s'}{2}=s$, $\frac{2t'}{3}=t$ とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で

$6r+4s+9t=6(1-s'-t')+4\cdot\frac{3s'}{2}+9\cdot\frac{2t'}{3}=6\{(1-s'-t')+s'+t'\}=6$

$r\geqq 0,\ s\leqq 0,\ t\leqq 0$

したがって、点Pは、平面AB′C′上の上図の斜線部(境界を含む。)に存在する。

(3)
《解答 1》

$\overrightarrow{OP}=2r\cdot\dfrac{\overrightarrow{OA}}{2}+2s\cdot\dfrac{\overrightarrow{OB}}{2}+2t\cdot\dfrac{\overrightarrow{OC}}{2}$

$2r=r'$, $2s=s'$, $2t=t'$ とおくと、$r'\leqq 0,\ s'\geqq 0,\ t'\geqq 0,\ \ r'+s'+t'=2(r+s+t)=1$

また、$\dfrac{\overrightarrow{OA}}{2}=\overrightarrow{OA'}$, $\dfrac{\overrightarrow{OB}}{2}=\overrightarrow{OB'}$, $\dfrac{\overrightarrow{OC}}{2}=\overrightarrow{OC'}$ とおくと

点 A', B', C' はそれぞれ辺 OA、OB、OC の中点であり

$\overrightarrow{OP}=r'\overrightarrow{OA'}+s'\overrightarrow{OB'}+t'\overrightarrow{OC'}$

$\overrightarrow{A'P}-\overrightarrow{A'O}=r'\left(-\overrightarrow{A'O}\right)+s'\left(\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{A'O}\right)+t'\left(\overrightarrow{A'C'}-\overrightarrow{A'O}\right)$

$\overrightarrow{A'P}=s'\overrightarrow{A'B'}+t'\overrightarrow{A'C'}$　（$\because$ $r'+s'+t'=1$）で

$s'\geqq 0,\ t'\geqq 0$　　また、$r'\leqq 0$ より、$1-(s'+t')\leqq 0$　　$\therefore$ $s'+t'\geqq 1$

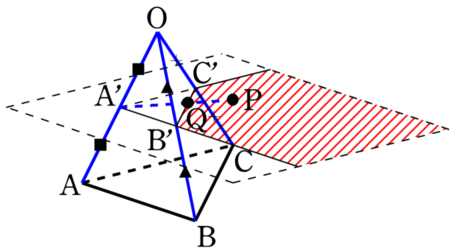
ここで、$s'+t'=k$ とおくと、$k\geqq 1$

$\overrightarrow{A'P}=k\cdot\left(\dfrac{s'}{k}\overrightarrow{A'B'}+\dfrac{t'}{k}\overrightarrow{A'C'}\right)$　　$\dfrac{s'}{k}\overrightarrow{A'B'}+\dfrac{t'}{k}\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'Q}$ とおくと

$\overrightarrow{A'P}=k\overrightarrow{A'Q}$

$\dfrac{s'}{k}\geqq 0,\ \dfrac{t'}{k}\geqq 0,\ \dfrac{s'}{k}+\dfrac{t'}{k}=1$ より

点 Q は線分 B'C' 上にある。
よって、点 P は、平面 A'B'C' 上の右図の斜線部
(境界を含む。) に存在する。



逆に、点 P が、平面 A'B'C' 上の右図の斜線部
(境界を含む。) に存在すれば
線分 A'P と線分 B'C' の交点を Q とおくと
$\overrightarrow{A'Q}=(1-t')\overrightarrow{A'B'}+t'\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{A'P}=k\overrightarrow{A'Q}$, $0\leqq t'\leqq 1$, $k\geqq 1$ を満たす実数 t', k が存在する。

$\overrightarrow{A'P}=k(1-t')\overrightarrow{A'B'}+kt'\overrightarrow{A'C'}$

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA'}=k(1-t')\left(\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA'}\right)+kt'\left(\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OA'}\right)$

$\overrightarrow{OP}=(1-k)\overrightarrow{OA'}+k(1-t')\overrightarrow{OB'}+kt'\overrightarrow{OC'}$

$=\dfrac{1-k}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{k(1-t')}{2}\overrightarrow{OB}+\dfrac{kt'}{2}\overrightarrow{OC}$

$\dfrac{1-k}{2}=r,\ \ \dfrac{k(1-t')}{2}=s,\ \ \dfrac{kt'}{2}=t$ とおくと、$\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$ で

$r+s+t=\dfrac{1-k}{2}+\dfrac{k(1-t')}{2}+\dfrac{kt'}{2}=\dfrac{1}{2}$, $r\leqq 0,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$

したがって、点 P は、平面 A'B'C' 上の上図の斜線部 (境界を含む。) に存在する。

《解答2》[《解答1》の途中から]

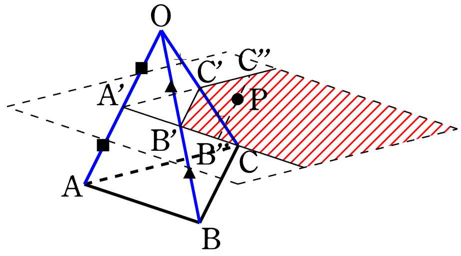
ここで、$s'+t'=k$ とおくと、$k \geqq 1$　　$\overrightarrow{\mathrm{A'P}}=\dfrac{s'}{k}\cdot k\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}+\dfrac{t'}{k}\cdot k\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$

$k\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}=\overrightarrow{\mathrm{A'B''}}$, $k\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}=\overrightarrow{\mathrm{A'C''}}$ とおくと、点B''は線分A'B'の点B'上の延長上(点B'も含む)に、点C''は線分A'C'の点C'上の延長上(点C'も含む)にある。

ここで、$\overrightarrow{\mathrm{A'P}}=\dfrac{s'}{k}\overrightarrow{\mathrm{A'B''}}+\dfrac{t'}{k}\overrightarrow{\mathrm{A'C''}}$

$\dfrac{s'}{k} \geqq 0$, $\dfrac{t'}{k} \geqq 0$, $\dfrac{s'}{k}+\dfrac{t'}{k}=1$ より

点Pは線分B''C''上にある。
点Pは、平面A'B'C'上の右図の斜線部
(境界を含む。)に存在する。



逆に、点Pが、平面A'B'C'上の右図の斜線部
(境界を含む。)に存在すれば
点Pを通り線分B'C'に平行な直線と直線OB'、OC'の交点をそれぞれB'', C''とおくと(点Pが線分B'C'上のときは、B''=B', C''=C')

$\overrightarrow{\mathrm{A'P}}=(1-t')\overrightarrow{\mathrm{A'B''}}+t'\overrightarrow{\mathrm{A'C''}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{A'B''}}=k\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{A'C''}}=k\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$

$0 \leqq t' \leqq 1$, $k \geqq 1$ を満たす実数 t', k が存在する。

$$\overrightarrow{\mathrm{A'P}}=(1-t')k\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}+t'k\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=(1-t')k\left(\overrightarrow{\mathrm{OB'}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)+t'k\left(\overrightarrow{\mathrm{OC'}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+(1-t')k\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+t'k\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1-k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{(1-t')k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{t'k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$\dfrac{1-k}{2}=r$, $\dfrac{(1-t')k}{2}=s$, $\dfrac{t'k}{2}=t$ とおくと

$$r+s+t=\frac{1-k}{2}+\frac{(1-t')k}{2}+\frac{t'k}{2}=\frac{1}{2},\quad r \leqq 0,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$$

したがって、点Pは、平面A'B'C'上の上図の斜線部(境界を含む。)に存在する。

《解説》

これらの問題は、図形と方程式の「軌跡」の問題と同様に、点Pの存在範囲を求めたら(必要条件)、逆に、その存在範囲の点はすべて条件を満たすこと(十分条件)を言う必要があると思われる。ただ、その逆が、点Pの存在範囲を求めた所を論理的に逆に辿れるのなら、省略してもよいと考えられる。これらの解答では、一応、その逆をきちんと書いてみた。これらのことについては
「【付録3】1次結合で表された基本的な図形・領域」も参照しよう。

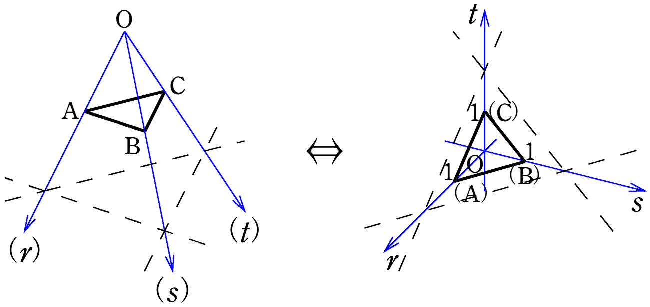
(1) 《解答1》では、直線OPと平面ABC上の交点Qの位置が、三角形ABCの内部にあることを示した。点Pが四面体OABCの内部にあることを示した。《解答2》では点Pを通る平面ABCと平行な平面と線分OA, OB, OCとの交点をそれぞれA', B', C'として、三角形A'B'C'の内部にあることを示して、点Pは四面体OABCの内部にあることを示した。その際、どちらにしても、次の「【参考2】空間内での同一平面上②」を利用していることに注意しよう。また、三角形の内部にあることについては、これらの解答(《解答1》、《解答2》)では、平面上の

点(《解答1》では点A、《解答2》では点A’)を始点(基準)とする位置ベクトルの形で、次の「【参考1】1次結合で表された基本的な図形・領域」の[3]を利用している。また、《別解1》、《別解2》のように、点Oを基準(始点)とする2つの位置ベクトルを1つの内分点の位置ベクトルに変形していく解法もある。

(2) 次の「【参考2】空間内での同一平面上②」を利用して、点Pが存在する平面を見つけることが大事である。その平面上のどの領域にあるのかは、その平面上の点(この《解答》では点A)を基準(始点)とする位置ベクトルで考える。その際、次の「【参考1】1次結合で表された基本的な図形・領域」の[4]の形で議論をした。

(3) 次の「【参考2】空間内での同一平面上②」を利用して、点Pが存在する平面を見つけることが大事である。その平面上のどの領域にあるのかは、その平面上の点A’を基準(始点)とする位置ベクトルで考える。その際、次の「【参考1】1次結合で表された基本的な図形・領域」の[3]の形の考え方を応用した。

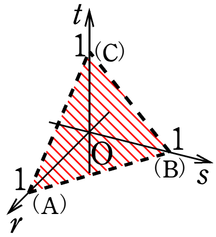
また、これらの領域は次の見方をするとよく分かる。
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ それぞれの長さを単位とするそれぞれの向きの点Oを原点とする斜交座標を$(r,\ s,\ t)$の直交座標と対応させると（右図）



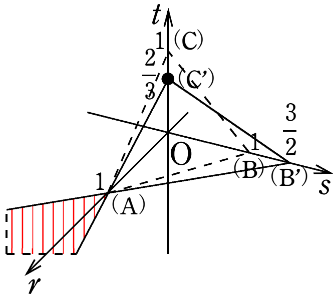
$$\left(\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \text{で} \\ \quad (r,\ s,\ t)=(1,\ 0,\ 0)\ \text{のとき、}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ \text{で、点Pは点Aに一致} \\ \quad (r,\ s,\ t)=(0,\ 1,\ 0)\ \text{のとき、}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \text{で、点Pは点Bに一致} \\ \quad (r,\ s,\ t)=(0,\ 0,\ 1)\ \text{のとき、}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \text{で、点Pは点Cに一致}\end{array}\right)$$

$r,\ s,\ t$ の問題文の条件の領域(下図)から、求める点Pの存在範囲が分かる。

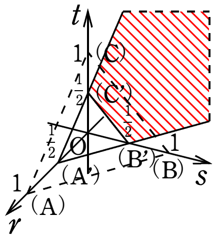
(1) $r+s+t<1$
$r>0,\ s>0,\ t>0$



(2) $6r+4s+9t=6$
$r\geqq 0,\ s\leqq 0,\ t\leqq 0$



(3) $r+s+t=\dfrac{1}{2}$
$r\leqq 0,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$



【参考1】1次結合で表された基本的な図形･領域
（【付録3】1次結合で表された基本的な図形･領域 参照）

同一直線上にない3つの点O, A, Bがある。
（ △OABができる、言い換えると、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,(\neq\vec{0})$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,(\neq\vec{0})$ は1次独立 ）

この平面OAB上の任意の点Pに対して
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により一意的に定まる係数 $s,\ t$ を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ … Ⓐ と表される。

（ $(s,\ t)=(1,\ 0)$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ で、点Pは点Aに一致
　$(s,\ t)=(0,\ 1)$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で、点Pは点Bに一致 ）

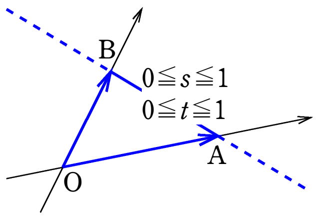
このとき（この設定で）

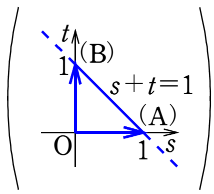
［1］ 点Pは、直線AB上にある

$\Leftrightarrow\quad s+t=1$

［2］ 点Pは、線分AB上にある

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s+t=1 \\ s\geqq 0,\ t\geqq 0 \end{cases}$$

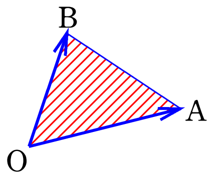


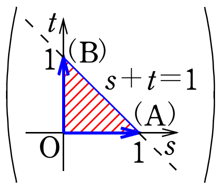


［3］ 点Pは、△OABの内部にある

$\Leftrightarrow\quad s+t<1,\ \ s>0,\ t>0$

（点Pは、△OABの周及び内部にある
　$\Leftrightarrow\quad s+t\leqq 1,\ \ s\geqq 0,\ t\geqq 0$ ）

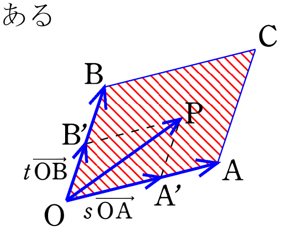


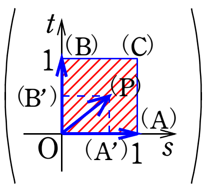


［4］ 点Pは、平行四辺形OACBの内部にある

$\Leftrightarrow\quad 0<s<1,\ \ 0<t<1$

（点Pは、平行四辺形OACBの
周及び内部にある
　$\Leftrightarrow\quad 0\leqq s\leqq 1,\ \ 0\leqq t\leqq 1$ ）

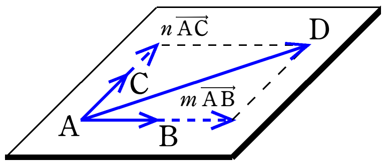




【参考2】空間内での同一平面上（【付録4】同一点、同一直線上、同一平面上 参照）

空間内の、同一直線上にない3つの点A, B, Cと点Dについて
（平面ABCができる、$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ が**1次独立**）

4つの点A, B, C, Dは同一平面上にある（**共面**）



⇔　①　$\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$　（m, nは実数）

（3つの点A, B, Cを含む平面
（平面ABC）上に、点Dがある。）

⇔　②　$\overrightarrow{OD}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$　（$l+m+n=1$）
（点Oに関する位置ベクトルによる表現）

（$\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$　（$l+m+n=1$）
ただし、$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$）