3次関数のグラフの概形

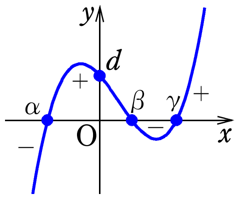
❶ 3次関数の共有点から見たグラフの概形

［1］ x軸との共有点（交点、接点）とグラフの概形

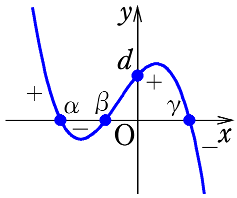
$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

㊟ これらのグラフで
x軸との共有点の
x座標が等しいときは
（重解）
グラフはx軸と接していると
考える。

$a>0$ の場合



$a<0$ の場合



（参考）

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$x-\alpha$ の符号	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$ の符号	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\gamma$ の符号	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ の符号	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

［2］ 2つのグラフ $y=f(x)$, $y=g(x)$ の共有点（交点・接点）から
2つのグラフの概形を描くときは、［1］に準じて考えればよい。

❷ 3次関数のグラフの点対称性と概形

（1） 3次関数の対称性

3次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ $\cdots$ ① を次のように変形する。

$$y=a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2\right)+cx+d=a\left\{\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3-3\cdot\left(\frac{b}{3a}\right)^2x-\left(\frac{b}{3a}\right)^3\right\}+cx+d$$
$$=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\left(-\frac{b^2}{3a}+c\right)x-\frac{b^3}{27a^2}+d$$
$$=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\left(-\frac{b^2}{3a}+c\right)\left(x+\frac{b}{3a}\right)-\left(-\frac{b^2}{3a}+c\right)\cdot\frac{b}{3a}-\frac{b^3}{27a^2}+d$$
$$=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\left(-\frac{b^2}{3a}+c\right)\left(x+\frac{b}{3a}\right)-\frac{bc}{3a}+\frac{2b^3}{27a^2}+d$$

$p=-\dfrac{b}{3a}$, $k=-\dfrac{b^2}{3a}+c$, $q=-\dfrac{bc}{3a}+\dfrac{2b^3}{27a^2}+d$ とおくと

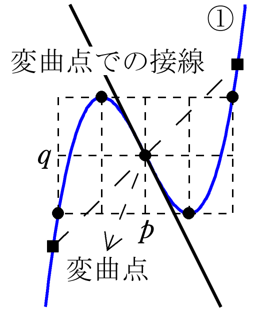
$y-q=a(x-p)^3+k(x-p)$　と変形できる。

（この変形のポイントは、3次関数の2次の項を消去することである。
2次関数の「**平方完成**」に倣って、3次関数の「立方完成？」と言って
も良いであろう。）

よって、①のグラフは、関数 $y=ax^3+kx$ … ② のグラフを
x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動したものである。
関数 $y=ax^3+kx$ は奇関数で
②のグラフは原点に関して対称であるので
①のグラフは点 $(p,\ q)$ に関して対称である。

（点 $(p,\ q)$ は、3次関数①のグラフの **変曲点** である。）

（教科書 数学Ⅲ $p.122$ **7** 関連）



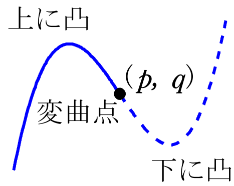
（$a>0$ の場合）

変曲点を求めるには、この変形で求める方法以外に

［1］極大、極小となる2つの点を求め
　　それら2つの点の中点で求める。

［2］（数学Ⅲ）第2次導関数 $y''=0$ となる点を求める。

等の方法がある。



㊟［1］（数学Ⅲ）関数 $y=ax^3+kx$ … ②　について
$y'=3ax^2+k,\ \ y''=6ax$ で
$y''=0$ より、$x=0$
$x=0$ の前後でより y'' の符号が変わるので
原点は、変曲点である。（右の凹凸表 参照）

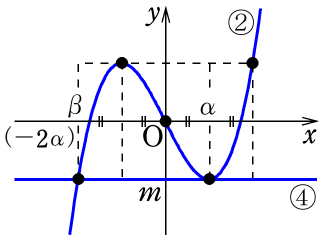
$a>0$ の場合の凹凸表

x	…	0	…
y''	−	0	＋
y	∩	0	∪

［2］$x=0$ のとき、$y'=k$ であるので
②の原点における接線の方程式は、$y=kx$ … ③
見方を変えると
②, ③より、$ax^3+kx=kx$　　$ax^3=0$　　$\therefore\ x=0$（3重解）
すなわち、②と③は接している。
また、$a>0$ の場合
$(ax^3+kx)-kx=ax^3$ より、$x<0$ のとき、$ax^3+kx<kx$
$x>0$ のとき、$ax^3+kx>kx$

(2) 4等分の法則

(1) より、一般に、3次関数は
②の形をしていると仮定してよい。
3次関数②が、$x=\alpha$ で極値 m をとるとき
②と直線 $y=m$ … ④ の接点以外の共有点の
x 座標を β とすると、②, ④より、3次方程式
$ax^3+kx=m$　　$ax^3+kx-m=0$
の解は、$x=\alpha,\ \beta$（α は重解）で
解と係数の関係より、$\alpha+\alpha+\beta=0$　　$\beta=-2\alpha$
すなわち、右の図のような点を②のグラフは通る。
（4等分の法則）



$a>0$ の場合

(3) 3次関数のグラフの概形

(1),(2) より、3次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq 0$）のグラフの概形は

［1］極値をもつ場合

［2］極値をもたないが、$y'=0$ となる点は存在する場合
（常に、$y'\geqq 0$ または $y'\leqq 0$　すなわち、単調増加または単調減少）

［3］極値をもたず、y' が一定符号となる場合
（常に、$y'>0$ または $y'<0$　すなわち、単調増加または単調減少）

の3つの場合で分類すると、最高次（3次）の項の係数 a の正・負によって
次の図のようになる。