

有名 問題	放物線と直線で囲まれた 図形の面積の最小値	サクシード 数学Ⅱ p.108 重要例題160 参考：チャート式 数学Ⅱ p.302 基本例題200
放物線 $y=x^2$ と点 (1, 2) を通る直線とで囲まれた図形の面積 S が最小になる とき、その最小値と直線の方程式を求めよ。		

《解答》

$$y=x^2 \cdots \textcircled{1}$$

点 (1, 2) を通る直線の傾きを m とおくと、この直線の方程式は

$$y=m(x-1)+2=mx-m+2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ より、} x^2=mx-m+2 \quad x^2-mx+m-2=0 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ の判別式 } D=(-m)^2-4(m-2)=m^2-4m+8$$

$$=(m-2)^2+4 > 0$$

よって、 $\textcircled{3}$ の異なる 2 つの実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (mx-m+2-x^2) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} (x^2-mx+m-2) dx$$

ここで、 $x^2-mx+m-2=(x-\alpha)(x-\beta)$ であるので、

$$S = - \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = - \left[-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \right] = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで、解の公式で 2 次方程式 $\textcircled{3}$ を解いた解を用いて

$$\beta-\alpha = \frac{m+\sqrt{D}}{2} - \frac{m-\sqrt{D}}{2} = \sqrt{D} \quad \therefore S = \frac{1}{6}(\sqrt{D})^3 = \frac{1}{6}(\sqrt{(m-2)^2+4})^3$$

よって、 $m=2$ のとき、 S は最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

このときの直線 $\textcircled{2}$ の方程式は、 $y=2x$

《別法》 [《解答》の途中から]

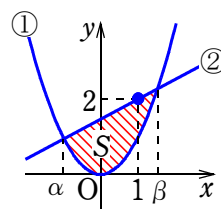
ここで、解と係数の関係より、 $\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=m-2$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=m^2-4(m-2)=(m-2)^2+4$$

$$\beta-\alpha > 0 \text{ であるので、} \beta-\alpha = \sqrt{(m-2)^2+4} \quad \therefore S = \frac{1}{6}(\sqrt{(m-2)^2+4})^3$$

よって、 $m=2$ のとき、 S は最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

このときの直線 $\textcircled{2}$ の方程式は、 $y=2x$



《別解》 [《解答》の途中から]

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{mx^2}{2} - (m-2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{m}{2}(\beta^2 - \alpha^2) - (m-2)(\beta - \alpha) - \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) \\ &= \frac{m}{2}(\beta - \alpha)(\beta + \alpha) - (m-2)(\beta - \alpha) - \frac{1}{3}(\beta - \alpha)(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)[3m(\alpha + \beta) - 6(m-2) - 2\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta\}] \end{aligned}$$

ここで、解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = m$ 、 $\alpha\beta = m - 2$ を代入して

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)[3m^2 - 6(m-2) - 2\{m^2 - (m-2)\}] \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)(m^2 - 4m + 8) = \frac{1}{6}(\sqrt{m^2 - 4m + 8})^3 \quad (\because \beta - \alpha = \sqrt{m^2 - 4m + 8}) \end{aligned}$$

よって、 $m=2$ のとき、 S は最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

このときの直線②の方程式は、 $y=2x$

《解説》

放物線①と点(1, 2)を通る直線②が異なる2つの交点をもつのは、図より明らかであるが、③の判別式 D が正であることから示した。

《解答》では、面積計算の定積分の被積分関数等を α, β のみで表し、次の【参考1】の公式(【付録1】放物線関係の面積計算 参照)を用いて計算し、最後に異なる2つの実数解 α, β の差 $\beta - \alpha$ を m で表して、面積 S を m で表した。

《別解》では、面積計算を普通に定積分で計算し、異なる2つの実数解 α, β の差 $\beta - \alpha$ をくくり出し、残りの因数を解と係数の関係を用いて m で表し、最後に $\beta - \alpha$ も m で表して、面積 S を m で表した。

《解答》の方が《別解》よりもすっきりはしている。しかし、【参考1】の公式もその証明(【付録1】放物線関係の面積計算 参照)を見て分かるように、《解答》は結局、定積分の計算を省略しているだけのことである。

また、異なる2つの実数解 α, β の差 $\beta - \alpha$ は、《別法》のように、解と係数の関係を用いて m で表してもよい。(【参考2】参照)

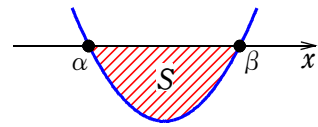
【参考1】 放物線関係の面積に関する定積分の公式

(【付録1】 放物線関係の面積計算 参照)

放物線と直線で囲まれた図形の面積を求めるのに
次の定積分の公式が用いられる。

$$\text{公式} \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$y = (x-\alpha)(x-\beta) \quad (\alpha < \beta)$$



$$\text{面積 } S = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

【参考2】 2次方程式の異なる2つの実数解の差 $\beta - \alpha$

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) が異なる2つの実数解 α, β ($\alpha < \beta$) を
もつとき、2つの実数解の差 $\beta - \alpha$ を求めるのに、次の①, ②の方法がある。
判別式を D とすると、 $D = b^2 - 4ac > 0$

① 解の公式の利用

$$\beta - \alpha > 0 \text{ であるので、 } \beta - \alpha = \left| \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

② 解と係数の関係の利用

解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ を用いて

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

$$\beta - \alpha > 0 \text{ であるので、 } \beta - \alpha = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$$