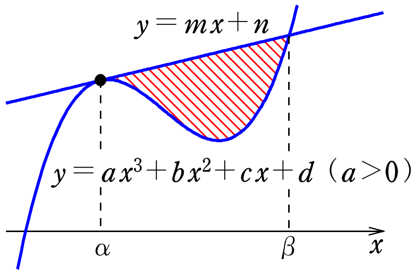
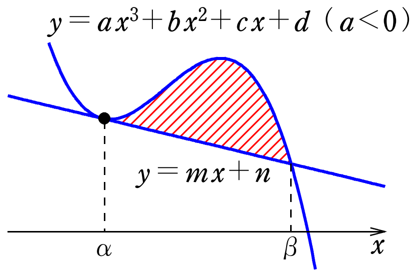
３次関数のグラフとその接線で囲まれた図形の面積

3次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq 0$）のグラフと、この曲線上の x 座標が α である点における接線 $y=mx+n$ で囲まれた図形の面積 S を求める。
この2つのグラフのもう1つの共有点（交点）の x 座標を β とするとき
3次関数と接線の方程式より
3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d-(mx+n)=0$ の実数解が、α（2重解），β である。
よって、$ax^3+bx^2+cx+d-(mx+n)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ … Ⓐ と因数分解できる。

［1］ $\alpha<\beta$ のとき





$$S=\int_{\alpha}^{\beta}|ax^2+bx^2+cx+d-(mx+n)|\,dx \quad \text{（Ⓐを用いて）}$$

$$=|a|\int_{\alpha}^{\beta}|(x-\alpha)^2(x-\beta)|\,dx$$

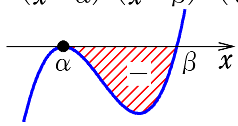
$$=-|a|\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx$$

ここで、$\beta-\alpha=p$（>0）とおくと

$$=-|a|\int_{0}^{p}x^2(x-p)\,dx$$

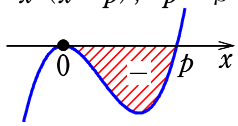
$$=-|a|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{p}{3}x^3\right]_0^p=|a|\frac{p^4}{12}=\frac{|a|(\beta-\alpha)^4}{12}$$

$y=(x-\alpha)^2(x-\beta)$（$\alpha<\beta$）



⇓

$y=x^2(x-p)$，$p=\beta-\alpha>0$



《別法》（途中から）［数学Ⅲの積分計算］

［点（α, 0）が原点（0, 0）になるように、グラフを x 軸方向に $-\alpha$ 平行移動］

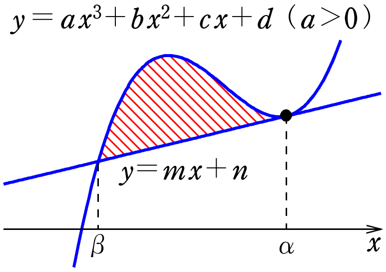
$$-|a|\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx$$

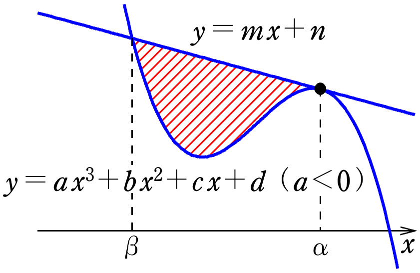
$$=-|a|\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx$$

$$=-|a|\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}\,dx=-|a|\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}-(\beta-\alpha)\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{|a|(\beta-\alpha)^4}{12}$$

［2］ $\beta<\alpha$ のとき





$$S=\int_{\beta}^{\alpha}|ax^2+bx^2+cx+d-(mx+n)|\,dx$$ （Ⓐを用いて）

$$=|a|\int_{\beta}^{\alpha}|(x-\beta)(x-\alpha)^2|\,dx$$

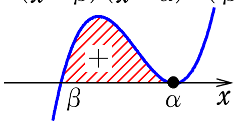
$$=|a|\int_{\beta}^{\alpha}(x-\beta)(x-\alpha)^2dx$$

ここで、$\beta-\alpha=q$（<0）とおくと

$$=|a|\int_{q}^{0}(x-q)\,x^2dx$$

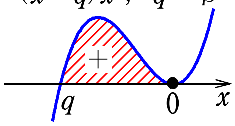
$$=|a|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{q}{3}x^3\right]_q^0=|a|\frac{q^4}{12}=\frac{|a|(\beta-\alpha)^4}{12}$$

$y=(x-\beta)(x-\alpha)^2$（$\beta<\alpha$）



$\Downarrow$

$y=(x-q)x^2$,　$q=\beta-\alpha<0$



《別法》（途中から）［数学Ⅲの積分計算］

［点 $(\alpha,\ 0)$ が原点 $(0,\ 0)$ になるように、グラフを x 軸方向に $-\alpha$ 平行移動］

$$|a|\int_{\beta}^{\alpha}(x-\beta)(x-\alpha)^2dx$$

$$=|a|\int_{\beta}^{\alpha}\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}(x-\alpha)^2dx$$

$$=|a|\int_{\beta}^{\alpha}\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}\,dx=|a|\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}-(\beta-\alpha)\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\beta}^{\alpha}$$

$$=\frac{|a|(\beta-\alpha)^4}{12}$$

《解説》

これらの定積分は、被積分関数を展開して、計算してもよいが、この方法の方が計算は楽である。

㊟［1］,［2］を合わせて、$S=\dfrac{|a||\beta-\alpha|^4}{12}$