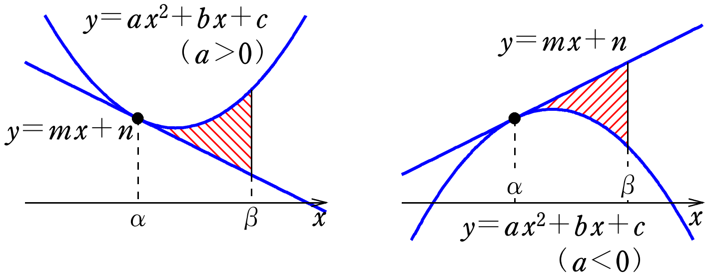
放物線とその接線に挟まれた図形の面積

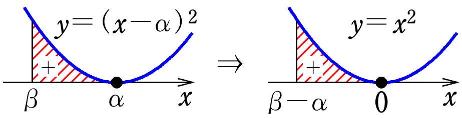
放物線 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）と、この放物線上の x 座標が α である点における接線 $y=mx+n$ と、直線 $x=\beta$ で囲まれた図形の面積 S を求める。
放物線と接線の方程式より、2次方程式 $ax^2+bx+c-(mx+n)=0$ の重解が $x=\alpha$ である。よって、$ax^2+bx+c-(mx+n)=a(x-\alpha)^2$ … Ⓐ

［1］ $\alpha<\beta$ のとき



$$S=\int_\alpha^\beta |ax^2+bx+c-(mx+n)|\,dx \quad （Ⓐを用いて）$$

$$=|a|\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2 dx=|a|\int_0^{\beta-\alpha} x^2 dx=|a|\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\beta-\alpha}=\frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3$$



（頂点 $(\alpha,\ 0)$ が原点 $(0,\ 0)$ となるように、グラフ・図形を x 軸方向に $-\alpha$ 平行移動）

《別法1》（途中より）［数学Ⅲ、本質的に上の計算と同じ］

$$S=|a|\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2 dx=|a|\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta=\frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3$$

《別法2》（途中より）［直接計算］

$$S=|a|\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2 dx=|a|\int_\alpha^\beta (x^2-2\alpha x+\alpha^2)\,dx=|a|\left[\frac{x^3}{3}-\alpha x^2+\alpha^2 x\right]_\alpha^\beta$$

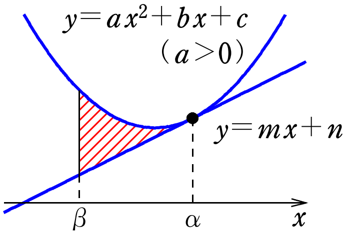
$$=|a|\left\{\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\alpha(\beta^2-\alpha^2)+\alpha^2(\beta-\alpha)\right\}$$

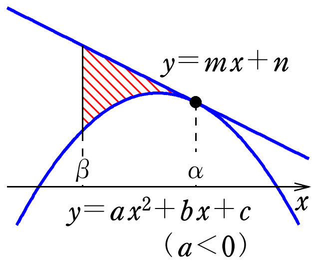
$$=\frac{|a|}{3}\{(\beta-\alpha)(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3\alpha(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+3\alpha^2(\beta-\alpha)\}$$

$$=\frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)\{(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3\alpha(\beta+\alpha)+3\alpha^2\}$$

$$=\frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)(\beta^2-2\beta\alpha+\alpha^2)=\frac{|a|}{3}(\beta-\alpha)^3$$

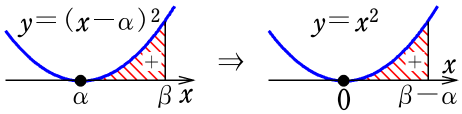
［2］ $\beta<\alpha$ のとき





$$S=\int_{\beta}^{\alpha}|ax^2+bx+c-(mx+n)|\,dx \quad （Ⓐを用いて）$$

$$=|a|\int_{\beta}^{\alpha}(x-\alpha)^2\,dx=|a|\int_{\beta-\alpha}^{0}x^2\,dx=|a|\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\beta-\alpha}^{0}=\frac{|a|}{3}(\alpha-\beta)^3$$



（頂点 $(\alpha,\ 0)$ が原点 $(0,\ 0)$ と
なるように、グラフ・図形を
x 軸方向に $-\alpha$ 平行移動）

《別法1》（途中より）［数学Ⅲ、本質的に上の計算と同じ］

$$S=|a|\int_{\beta}^{\alpha}(x-\alpha)^2\,dx=|a|\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\beta}^{\alpha}=\frac{|a|}{3}(\alpha-\beta)^3$$

《別法2》（途中より）［直接計算］

$$S=|a|\int_{\beta}^{\alpha}(x-\alpha)^2\,dx=|a|\int_{\beta}^{\alpha}(x^2-2\alpha x+\alpha^2)\,dx=|a|\left[\frac{x^3}{3}-\alpha x^2+\alpha^2 x\right]_{\beta}^{\alpha}$$

$$=|a|\left\{\frac{1}{3}(\alpha^3-\beta^3)-\alpha(\alpha^2-\beta^2)+\alpha^2(\alpha-\beta)\right\}$$

$$=\frac{|a|}{3}\{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3\alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+3\alpha^2(\alpha-\beta)\}$$

$$=\frac{|a|}{3}(\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3\alpha(\alpha+\beta)+3\alpha^2\}$$

$$=\frac{|a|}{3}(\alpha-\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)=\frac{|a|}{3}(\alpha-\beta)^3$$

注 ［1］,［2］を合わせて、$S=\dfrac{|a|}{3}|\alpha-\beta|^3$ （公式）