有名問題　$n!$の素因数の個数

10^n（nは自然数）は $200!=200\times199\times\cdots\cdots\times2\times1$ を割り切る。
このようなnの最大値を求めよ。

《解答》

1から200までの自然数の中の、2^n（$n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$）の倍数の個数を
a_nとすると、$a_1=100$, $a_2=50$, $a_3=25$, $a_4=12$, $a_5=6$, $a_6=3$, $a_7=1$
よって、200! に含まれる素因数2の個数は

$$7\cdot a_7+6\cdot(a_6-a_7)+5\cdot(a_5-a_6)+4\cdot(a_4-a_5)+3\cdot(a_3-a_4)+2\cdot(a_2-a_3)+1\cdot(a_1-a_2)$$
$$=a_7+a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1=197$$

また、1から200までの自然数の中の、5^n（$n=1, 2, 3$）の倍数の個数をb_nとすると
$b_1=40$, $b_2=8$, $b_3=1$
よって、200! に含まれる素因数5の個数は

$$3\cdot b_3+2\cdot(b_2-b_3)+1\cdot(b_1-b_2)=b_3+b_2+b_1=49$$

$10=2\times5$ であるので、200! に含まれる因数10の個数は、49個　　（答）$n=49$

《解説》

この問題は、「200! を計算したとき、末尾に続く0の個数はいくつか。」と言い換えてもよい。
この問題では、少ないと思われる素因数5の個数を数えるだけでも答えは求められるが、200! に含まれる素因数2と5の個数をきっちり数えた方がよい。
例えば、34! に含まれる素因数2の個数の場合、次のように表を考えると、分かりやすい。

1から34までの2の倍数の2^n（$n=1, 2, 3, 4, 5$）の因数表

	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
2	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2^2		○		○		○		○		○		○		○		○	
2^3				○				○				○				○	
2^4								○								○	
2^5																○	

○は、上の自然数が左の欄の因数を持つことを示す。

この「○」の総数が、34! に含まれる素因数2の個数になる。
「○」の個数を、普通は各列ごとに数えて加えると

$$1\cdot(17-8)+2\cdot(8-4)+3\cdot(4-2)+4\cdot(2-1)+5\ (=17+8+4+2+1)=32$$

となるが、「○」の個数を、各行ごとに数えて加える、すなわち、1から34までの自然数の中の、2^n（$n=1, 2, 3, 4, 5$）の倍数の個数の和 $17+8+4+2+1=32$ が、素因数2の個数でもある。この方がうまい数え方である。
また、各行の「○」の個数は、34を各行の左の2^n（$n=1, 2, 3, 4, 5$）で割ったときの商になっていることに注意しよう。

【参考】$n!$ に含まれる素因数 p の個数

ガウスの記号 [ ]（x の整数部分、x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す）を用いると n を自然数として

$n!$ に含まれる素因数 p の個数は、$\left[\dfrac{n}{p^1}\right]+\left[\dfrac{n}{p^2}\right]+\left[\dfrac{n}{p^3}\right]+\cdots\cdots$ $\left(=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{p^k}\right]\right)$

（$\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$ は、n を p^k で割った商になるので、1から n までの自然数の中の p^k の倍数の個数になる。（k は自然数）

$p^k>n$ となると、$\left[\dfrac{n}{p^k}\right]=0$ となるので、この和は実際は有限個の和である。）

㊟ この問題では、$a_n=\left[\dfrac{200}{2^n}\right]$, $b_n=\left[\dfrac{200}{5^n}\right]$ となる。