有名問題	大小比較と不等式	サクシード 数学Ⅱ p.16 重要例題21 類題：サクシード 数学Ⅱ p.17 238 参考：チャート式 数学Ⅱ p.40 基本例題23

$0<a<b$, $a+b=2$ のとき、1, a, b, ab, $\dfrac{a^2+b^2}{2}$ の大小関係を調べよ。

《解答》

$a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$ とすると、$ab=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{a^2+b^2}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}=\dfrac{5}{4}$ で

$a<ab<1<\dfrac{a^2+b^2}{2}<b$ と予想できる。よって、この不等式を証明する。

まず、$0<a<b$, $a+b=2$ より、$b=2-a$ で、$0<a<2-a$　　$\therefore\ 0<a<1$

このとき、$ab-a=a(2-a)-a=a-a^2=a(1-a)>0$

$$1-ab=1-a(2-a)=a^2-2a+1=(a-1)^2>0$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}-1=\frac{a^2+(2-a)^2}{2}-1=a^2-2a+1=(a-1)^2>0$$

$$b-\frac{a^2+b^2}{2}=2-a-\frac{a^2+(2-a)^2}{2}=a-a^2=a(1-a)>0$$

よって、$a<ab<1<\dfrac{a^2+b^2}{2}<b$

《別解》

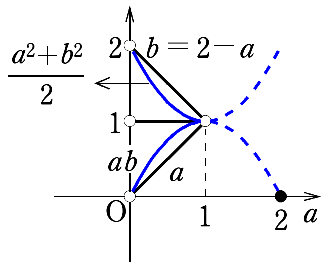
1, a, $b=2-a$, $ab=-a(a-2)=-(a^2-2a)=-(a-1)^2+1$,

$\dfrac{a^2+b^2}{2}=\dfrac{a^2+(2-a)^2}{2}=a^2-2a+2=(a-1)^2+1$

1, a, b, ab, $\dfrac{a^2+b^2}{2}$ をすべて a の関数と考えて

そのグラフを $0<a<1$ で比べると（右図）

$a<ab<1<\dfrac{a^2+b^2}{2}<b$



《解説》

5つの式の大小比較をするのは、面倒である。そこで、大体の見当をつけるため、適当な値を代入して調べようというのが、《解答》の発想である。
また、《別解》のようなグラフを利用する解法もある。この解法では、見当をつける必要はないし、途中で大小が入れ替わっても、グラフから分かる。