有名問題	桁数と最高位の数字	サクシード 数学Ⅱ $p.84$ 重要例題121 参考：チャート式 数学Ⅱ $p.243$ 重要例題159

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ として計算せよ。

(1) $\log_{10}4$，$\log_{10}5$，$\log_{10}6$，$\log_{10}8$，$\log_{10}9$ の値を求めよ。

(2) 15^{20} は何桁の整数か。また、15^{20} の最高位の数字を求めよ。

(3) 15^{50} は何桁の整数か。また、15^{50} の最高位の数字を求めよ。

《解答》

(1) $\log_{10}4=\log_{10}2^2=2\log_{10}2=0.6020$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}(2\times3)=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$

$\log_{10}8=\log_{10}2^3=3\log_{10}2=0.9030$

$\log_{10}9=\log_{10}3^2=2\log_{10}3=0.9542$

(2) $\log_{10}15^{20}=20\log_{10}(3\times5)=20(\log_{10}3+\log_{10}5)=20\times(0.4771+0.6990)$

$=23.522$

$23<\log_{10}15^{20}<24$　　$\therefore$ $10^{23}<15^{20}<10^{24}$

よって、15^{20}は24桁の整数である。

また、$0.4771<0.522<0.6020$ より、$\log_{10}3<0.522<\log_{10}4$

$\log_{10}3+23<23.522<\log_{10}4+23$　　$\log_{10}3+23<\log_{10}15^{20}<\log_{10}4+23$

$\therefore$ $3\times10^{23}<15^{20}<4\times10^{23}$　　よって、15^{20}の最高位の数字は3である。

(2) $\log_{10}15^{50}=50\log_{10}(3\times5)=50(\log_{10}3+\log_{10}5)=50\times(0.4771+0.6990)$

$=58.805$

$58<\log_{10}15^{50}<59$　　$\therefore$ $10^{58}<15^{50}<10^{59}$

よって、15^{50}は59桁の整数である。

また、$0.7781<0.805<0.8451$ より、$\log_{10}6<0.805<\log_{10}7$

$\log_{10}6+58<58.805<\log_{10}7+58$　　$\log_{10}6+58<\log_{10}15^{50}<\log_{10}7+58$

$\therefore$ $6\times10^{58}<15^{50}<7\times10^{58}$　　よって、15^{50}の最高位の数字は6である。

《解説》

正の数Mに対して$\log_{10}M$ は、底10を何乗したらMになるかという数である。
Mの桁数は、Mが10を何乗かが分かればよいので、$\log_{10}M$ を計算すればよい。
数値$\log_{10}M$ の整数部分から桁数が分かる。小数部分は桁数には関係がないが、小数部分から、Mの最高位の数字が分かる。（次の【参考】参照）

【参考】最高位の数字

$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$（有効数字4桁の近似値）の値から、7以外の1桁の整数の常用対数の値（有効数字4桁の近似値）がすべて計算できる。すなわち

$\log_{10}1=0$

$\log_{10}4=\log_{10}2^2=2\log_{10}2=0.6020$　（常用対数表では、$\log_{10}4=0.6021$）

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

$\log_{10}6=\log_{10}(2\times3)=\log_{10}2+\log_{10}3=0.3010+0.4771=0.7781$

（常用対数表では、$\log_{10}6=0.7782$）

$\log_{10}8=\log_{10}2^3=3\log_{10}2=0.9030$　（常用対数表では、$\log_{10}8=0.9031$）

$\log_{10}9=\log_{10}3^2=2\log_{10}3=0.9542$

これらの値と、$\log_{10}7=0.8451$（有効数字4桁の近似値）を用いて
最高位の数字が求められる。

整数Mの桁数がn桁のとき

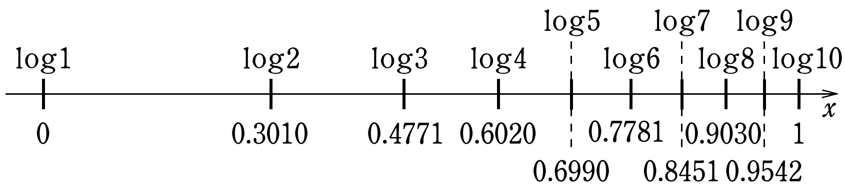
「整数Mの最高位の数字がp」（$p=1, 2, 3, \cdots\cdots, 9$）

$\Leftrightarrow\quad p\times10^{n-1}\leqq M<(p+1)\times10^{n-1}$

$\Leftrightarrow\quad \log_{10}p+n-1\leqq\log_{10}M<\log_{10}(p+1)+n-1$

$\left(p\times10^{n-1}=p\underbrace{0\cdots\cdots0}_{0\text{が}n-1\text{個}}\right)$

言い換えると、$\log M$の小数部分が、下記の対数の値と比較して、どことどこの間にあるかを調べればよい。（底10は省略）



常用対数$\log_{10}M$の整数部分から整数Mの桁数が分かり、$\log_{10}M$の小数部分の数値を$\log_{10}2$～$\log_{10}9$の値と比較すると整数Mの最高位の数字が分かる。

$\boxed{\text{例}}$　整数Mについて

$2\leqq\log_{10}M<3\quad\Leftrightarrow\quad 10^2\leqq M<10^3\quad\Leftrightarrow\quad 100\leqq M<1000$
のとき、整数Mは3桁の整数である。

さらにもっと精密に（不等式の範囲をもっと狭くすると）
$\log_{10}5+2\leqq\log_{10}M<\log_{10}6+2$

$\Leftrightarrow\quad\log_{10}(5\times10^2)\leqq\log_{10}M<\log_{10}(6\times10^2)\quad\Leftrightarrow\quad 500\leqq M<600$
のとき、整数Mの最高位の数字は5である。