有名問題	2つの等差数列の共通項	サクシード 数学B $p.152$ 重要例題64 参考：チャート式 数学B $p.436$ 基本例題80

数列 $\{a_n\}$ は初項1、公差3の等差数列、数列 $\{b_n\}$ は初項5、公差4の等差数列である。数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を順に並べると、どんな数列になるか。

《解答》

$a_m=1+(m-1)\cdot 3=3m-2,\ \ b_n=5+(n-1)\cdot 4=4n+1$　(m, n は自然数)

数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ に共通に含まれる項は、$a_m=b_n$　より、$3m-2=4n+1$

$3m-4n\ =3$ … ①

また、$3\cdot 1-4\cdot 0=3$ … ②

①－②　$3(m-1)-4n=0$　　$3(m-1)=4n=N$ とおく。

N は3の倍数であり かつ 4の倍数でもあるので、3と4の最小公倍数12の倍数である。

よって、$N=12k$　(m, n は自然数より、k も自然数)

$3(m-1)=12k$ より、$m=4k+1$

ゆえに、数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ に共通に含まれる項は

$a_{4k+1}=3(4k+1)-2=12k+1$ (k は自然数)

（
$4n=12k$ より、$n=3k$

ゆえに、数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ に共通に含まれる項は

$b_{3k}=4\cdot 3k+1=12k+1$ (k は自然数)
）

すなわち、初項13、公差12の等差数列になる。

《別解》

数列 $\{a_n\}$ ：1, 4, 7, 10, $\boxed{13}$, 16, 19, 22, $\boxed{25}$, 28, 31, 34, $\boxed{37}$, 40, ……

数列 $\{b_n\}$ ：　5 , 9 , $\boxed{13}$, 17 , 21 , $\boxed{25}$, 29 , 33 , $\boxed{37}$, 41, ……

これより、数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ は、最初 $a_5=b_3=13$ で一致し

それ以降、数列 $\{a_n\}$ の4番目毎と、数列 $\{b_n\}$ は3番目毎は一致する。

言い換えると、3と4の最小公倍数、12加える毎に一致する。すなわち、

数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ に共通に含まれる項は、初項13、公差12の等差数列になる。

《解説》

《解答》の、$3m-4n=3$ … ① を満たす自然数 m, n を求めるには、①を満たす整数解を1組を見つけて、例えば、《解答》では、「$m=1, n=0$ を見つけて、すなわち $3\cdot 1-4\cdot 0=3$ … ② より、①－②　$3(m-1)-4n=0$」と変形して求める。

他の解、例えば、$m=5, n=3$ とか $m=-3, n=-3$ 等でもよい。

《別解》の方が全体が見えて理解しやすい。このような解答でもよいとは思うが、論理が少し気になる。

この問題から、一般的に次のようなことが言える。

「2つの等差数列があって、それらの共通項がある (ないときも考えられる) ならば
その共通項も等差数列になる。」