

## 数列の公式・まとめ

公式の証明・原理等は、各自で教科書等で確認しておくこと

### 等差数列の一般項の公式

初項  $a$ 、公差  $d$  の等差数列の一般項  $a_n$  は  

$$a_n = a + (n-1)d$$

### 等差数列の和の公式

初項  $a$ 、公差  $d$  の等差数列の  
 初項から第  $n$  項 (末項  $l = a + (n-1)d$ ) までの和  $S_n$  は (項数  $n$ )

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

### 等差数列をなす3数 (等差中項)

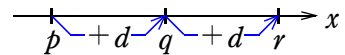
3つの数  $p, q, r$  について

$p, q, r$  がこの順に等差数列をなす

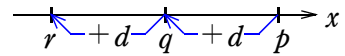
$$\Leftrightarrow p = a - d, \quad q = a, \quad r = a + d \quad (\text{公差 } d)$$

$$\Leftrightarrow 2q = p + r \quad \left[ q = \frac{p+r}{2} \quad (\text{等差中項}) \right]$$

$d > 0$  のとき



$d < 0$  のとき



② [1]  $p, q, r$  が正の数 のとき、 $q$  は、 $p$  と  $r$  の **相加平均** になる。

[2]  $p, q, r$  がこの順に公差  $d$  の等差数列をなす

$$\Leftrightarrow r, q, p \text{ がこの順に公差 } -d \text{ の等差数列をなす}$$

### 等比数列の一般項の公式

初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列の一般項  $a_n$  は  

$$a_n = ar^{n-1}$$

### 等比数列の和の公式

初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列の初項から第  $n$  項 (項数  $n$ ) までの和  $S_n$  は  
 (  $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$  )

$$\begin{cases} r \neq 1 \text{ のとき、 } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \\ r = 1 \text{ のとき、 } S_n = na \end{cases}$$

等比数列をなす3数（等比中項）

3つの数  $a, b, c$  について

$a, b, c$  がこの順に等比数列をなす

$$\Leftrightarrow a, b=ar, c=ar^2 \quad (\text{公比 } r)$$

$$\Leftrightarrow b^2=a \quad (b = \pm\sqrt{ac} \text{ (等比中項)})$$

② [1]  $a, b, c$  が正の数するとき、 $b$  は、 $a$  と  $c$  の相乗平均になる。

[2]  $a, b, c$  がこの順に、公比  $r (\neq 0)$  の等比数列をなす

$$\Leftrightarrow c, b, a \text{ がこの順に、公比 } \frac{1}{r} \text{ の等比数列をなす}$$

$\Sigma$ の性質

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k \quad (\text{複号同順})$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n p a_k = p \sum_{k=1}^n a_k \quad (p \text{ は変数 } k \text{ に無関係な定数})$$

③ ①, ② より、 $p, q$  を変数  $k$  に無関係な定数として

$$\sum_{k=1}^n (p a_k + q b_k) = p \sum_{k=1}^n a_k + q \sum_{k=1}^n b_k$$

累乗の和の公式

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n k = 1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \left( \begin{array}{l} \text{初項 } 1, \text{ 末項 } n, \text{ 項数 } n \text{ (公差 } 1) \\ \text{の等差数列の和} \end{array} \right)$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 \quad \left( = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \right)$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^n p = np \quad (p \text{ は変数 } k \text{ に無関係な定数}) \quad \text{特に、} \sum_{k=1}^n 1 = n$$

⑤  $r \neq 1$  のとき

$$\sum_{k=1}^n ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

(初項  $a$ 、公比  $r$ 、項数  $n$  の等比数列の和の公式)

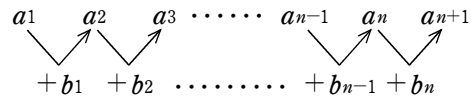
$$\left( = a \sum_{k=1}^n r^{k-1} = a(1+r+r^2+\dots+r^{n-1}) \right)$$

階差数列から元の数列の一般項を求める公式

数列  $\{a_n\}$  の階差数列を  $\{b_n\}$  とするとき ( $b_n = a_{n+1} - a_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ))  
 $n \geq 2$  のとき

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1})$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$



累乗の和公式 階差数列版 ( $n \rightarrow n-1$ )

①  $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} (n-1) \{(n-1) + 1\} = \frac{1}{2} n(n-1)$

②  $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6} (n-1) \{(n-1) + 1\} \{2(n-1) + 1\} = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1)$

③  $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{ \frac{1}{2} (n-1) \{(n-1) + 1\} \right\}^2 = \left\{ \frac{1}{2} n(n-1) \right\}^2 \left[ = \frac{1}{4} n^2(n-1)^2 \right]$

④  $\sum_{k=1}^{n-1} p = (n-1)p$  ( $p$  は変数  $k$  に無関係な定数) 特に、 $\sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1$

⑤  $r \neq 1$  のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} = \frac{a(1-r^{n-1})}{1-r} = \frac{a(r^{n-1}-1)}{r-1}$$

(初項  $a$ 、公比  $r$ 、項数  $n-1$  の等比数列の和の公式)

$$\left[ = a \sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1} = a(1+r+r^2+\dots+r^{n-2}) \right]$$

和  $S_n$  から一般項  $a_n$  を求める公式

数列  $\{a_n\}$  において、初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とすると  
 数列  $\{a_n\}$  の一般項  $a_n$  は

$$\begin{cases} (n=1 \text{ のとき}) a_1 = S_1 & (\text{初項}) \\ n \geq 2 \text{ のとき、} a_n = S_n - S_{n-1} & (\text{第2項以降}) \end{cases}$$

部分分数分解による分数型の数列の和

基本例

部分分数分解 
$$\frac{1}{\{a+(k-1)d\} \cdot (a+kd)} = \frac{1}{d} \cdot \left\{ \frac{1}{a+(k-1)d} - \frac{1}{a+kd} \right\}$$
  
 (k=1, 2, 3, …, n)

上記の部分分数分解を用いて

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a \cdot (a+d)} + \frac{1}{(a+d) \cdot (a+2d)} + \frac{1}{(a+2d) \cdot (a+3d)} + \cdots + \frac{1}{\{a+(n-1)d\} \cdot (a+nd)} \\ &= \frac{1}{d} \cdot \left[ \left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} \right\} + \left\{ \frac{1}{a+d} - \frac{1}{a+2d} \right\} + \left\{ \frac{1}{a+2d} - \frac{1}{a+3d} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{1}{a+(n-1)d} - \frac{1}{a+nd} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{d} \cdot \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+nd} \right) \end{aligned}$$

(等差数列) × (等比数列) の項の和

初項 a、公差 d の等差数列 {a<sub>n</sub>} : a<sub>n</sub> = a + (n-1)d  
 初項 b、公比 r (≠1) の等比数列 {b<sub>n</sub>} : b<sub>n</sub> = br<sup>n-1</sup> に対して

和 S<sub>n</sub> = a<sub>1</sub>b<sub>1</sub> + a<sub>2</sub>b<sub>2</sub> + a<sub>3</sub>b<sub>3</sub> + … + a<sub>n</sub>b<sub>n</sub>  $\left( = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \right)$   
 = a · b + (a+d) · br + (a+2d) · br<sup>2</sup> + … + {a+(n-1)d} · br<sup>n-1</sup> は

$$\begin{aligned} S_n &= a \cdot b + (a+d) \cdot br + (a+2d) \cdot br^2 + \cdots + \{a+(n-1)d\} \cdot br^{n-1} \\ -) rS_n &= a \cdot br + (a+d) \cdot br^2 + \cdots + \{a+(n-2)d\} \cdot br^{n-1} + \{a+(n-1)d\} \cdot br^n \\ (1-r)S_n &= a \cdot b + \frac{d \cdot br}{1-r^{n-1}} + \frac{d \cdot br^2}{1-r^{n-1}} + \cdots + \frac{d \cdot br^{n-1}}{1-r^{n-1}} - \{a+(n-1)d\} \cdot br^n \\ (1-r)S_n &= ab + dbr \cdot \frac{1-r^{n-1}}{1-r} - \{a+(n-1)d\} br^n \\ \therefore S_n &= \frac{ab - \{a+(n-1)d\} br^n}{1-r} + \frac{dbr(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} \quad (\text{この形でもよい。}) \\ &= \frac{b\{a(1-r) + dr\} - b(a+nd)r^n + \{a+(n-1)d\} r^{n+1}}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

群数列

1つの数列を、初項から順に  
 第 n 群が、f(n) 個 (n=1, 2, 3, …) の項を含むように、群に分ける。

[ (第 m 群の第 l 番目) → (第 n 項) ]

m ≥ 2 のとき、n = {f(1) + f(2) + f(3) + … + f(m-1)} + l  
 ( n = (第 (m-1) 群までの項数) + l )

[ (第 n 項) → (第 m 群の第 l 番目) ]

① 第 n 項が第何群にあるかを求める。

第 n 項が第 m 群にあるとすると

m ≥ 2 のとき

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(m-1) < n \leq f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(m)$$

( (第 (m-1) 群までの項数) < n ≤ (第 m 群までの項数) )

この不等式を満たす自然数 m を求める。

② 第 n 項が第 m 群の第何番目であるかを求める。

第 n 項が第 m 群の第 l 番目であるとすると

m ≥ 2 のとき、l = n - {f(1) + f(2) + f(3) + … + f(m-1)}

( l = n - (第 (m-1) 群までの項数) )

漸化式の解法（数列の第  $n$  項（一般項）を求める）の原理

次の①～③の3つのいずれかの形になって、漸化式は解ける。

① 等差数列（階差が一定）

$$X_1 = a, X_{n+1} = X_n + d \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

⇒ 数列  $\{X_n\}$  は、初項  $a$ 、公差  $d$  の等差数列

$$\Rightarrow X_n = a + (n-1)d \quad (\text{等差数列の第 } n \text{ 項 (一般項)})$$

② 等比数列

$$Y_1 = a, Y_{n+1} = rY_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

⇒ 数列  $\{Y_n\}$  は、初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列

$$\Rightarrow Y_n = ar^{n-1} \quad (\text{等比数列の第 } n \text{ 項 (一般項)})$$

③ 階差数列が分かる形

$$Z_1 = a, Z_{n+1} = Z_n + f(n) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

⇒ 数列  $\{Z_n\}$  の階差数列が、数列  $\{f(n)\}$ （数列  $\{Z_n\}$  の初項は  $a$ ）

$$\begin{aligned} \Rightarrow n \geq 2 \text{ のとき、} Z_n &= a + \{f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n-1)\} \\ &= a + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (\text{第 } n \text{ 項 (一般項)}) \end{aligned}$$

[1] 隣接2項間の漸化式  $a_{n+1} = pa_n + q$  ( $p \neq 0, 1, q \neq 0$ ) の解法

《解法1》[数列  $\{a_n - \alpha\}$  を等比数列にする]

$$\text{与式より、} a_{n+1} = pa_n + q \cdots \text{①}$$

$$\alpha = p\alpha + q \cdots \text{② (特性方程式)} \quad \left[ \alpha = \frac{q}{1-p} \right]$$

$$\text{①} - \text{②} \quad a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

すなわち、数列  $\{a_n - \alpha\}$  は、公比  $p$  の等比数列である。また、初項  $a_1 - \alpha$  よって、 $a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1} \quad \therefore a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$

㊟ この解法のポイントは、「数列  $\{a_n - \alpha\}$  が等比数列になるように定数  $\alpha$  の値を定める。」ということである。

$$\text{与式より、} a_{n+1} - \alpha = pa_n + q - \alpha = p(a_n - \alpha) + p\alpha + q - \alpha$$

よって、 $\alpha = p\alpha + q$  ( $(p-1)\alpha + q = 0$ ) (特性方程式) となるように、定数  $\alpha$  (特性解) の値を定めればよい。

《解法2》[階差数列の利用]

$$\text{与式より、} a_{n+2} = pa_{n+1} + q \cdots \text{③}$$

$$a_{n+1} = pa_n + q \cdots \text{①}$$

$$\text{③} - \text{①} \quad a_{n+2} - a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n)$$

数列  $\{a_n\}$  の階差数列  $\{b_n\}$  とすると ( $b_n = a_{n+1} - a_n$ )

$b_{n+1} = pb_n$  すなわち、数列  $\{b_n\}$  は、公比  $p$  の等比数列である。

また、初項  $b_1 = a_2 - a_1 = (pa_1 + q) - a_1$

よって、 $b_n = b_1 p^{n-1}$

$$[1] \quad n=1 \text{ のとき、} a_n = a_1$$

$$[2] \quad n \geq 2 \text{ のとき、} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_1 p^{k-1}$$

[2] 隣接2項間の漸化式  $a_{n+1} = pa_n + qr^n$  ( $p \neq 0, 1, q \neq 0$ ) の解法

《解法1》[ [1] に帰着 ( $r^n$  を消去) ]

与式の両辺を  $r^{n+1}$  で割ると、
$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{p}{r} \cdot \frac{a_n}{r^n} + \frac{q}{r}$$

$b_n = \frac{a_n}{r^n}$  とおくと、 $b_1 = \frac{a_1}{r}$ 、 $b_{n+1} = \frac{p}{r}b_n + \frac{q}{r}$

[1] の解法により、 $b_n$  を求め、 $a_n (= r^n b_n)$  を求める。

《解法2》[ 階差数列が分かる形 に帰着 ]

与式の両辺を  $p^{n+1}$  で割ると、
$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{q}{p} \left( \frac{r}{p} \right)^n$$

$c_n = \frac{a_n}{p^n}$  とおくと、 $c_1 = \frac{a_1}{p}$ 、 $c_{n+1} = c_n + \frac{q}{p} \left( \frac{r}{p} \right)^n$

よって、数列  $\{c_n\}$  の階差数列が、 $\left\{ \frac{q}{p} \left( \frac{r}{p} \right)^n \right\}$  である。(階差数列が分かる形)

この階差数列から、 $c_n$  を求め、 $a_n (= p^n c_n)$  を求める。

[3] 隣接3項間の漸化式  $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$  ( $p \neq 0, q \neq 0$ ) の解法

《解法》[ 隣接3項間の漸化式の基本変形 ]

与えられた漸化式より、特性方程式  $t^2 + pt + q = 0$  を作り、この方程式の解を  $\alpha, \beta$  とすると、解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = -p$ 、 $\alpha\beta = q$   
よって、与式は、 $a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots \textcircled{1} \text{ と変形される。}$$

$$(a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \cdots \textcircled{2})$$

すなわち、数列  $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$  は、公比  $\beta$  の等比数列である。

また、初項  $a_2 - \alpha a_1$

よって、 $a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1) \beta^{n-1} \cdots \textcircled{1}'$

( $\textcircled{2}$  より、同様にして、 $a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1) \alpha^{n-1} \cdots \textcircled{2}'$ )

$\textcircled{1}' - \textcircled{2}'$  から、 $a_n$  を求める。

④  $\textcircled{1}$  の変形のポイントは、「数列  $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$  が等比数列になるように定数  $\alpha$  の値を定める。」ということである。この等比数列の公比を  $\beta$  とすれば、 $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

これを与式と比較すると、 $\alpha + \beta = -p$ 、 $\alpha\beta = q$  となる  $\alpha, \beta$  を求めればよい。この定数  $\alpha, \beta$  (特性解) を求める2次方程式が特性方程式  $t^2 + pt + q = 0$  である。(解と係数の関係)

[4] 分数型の漸化式  $a_{n+1} = \frac{pa_n}{ra_n + s}$  ( $p \neq 0, r \neq 0, s \neq 0, a_1 \neq 0$ ) の解法

《解法》[ 両辺の逆数をとって、[1] 隣接2項間の漸化式に帰着 ]

まず、 $a_1 \neq 0$  また、与式より、 $a_n \neq 0$  ならば、 $a_{n+1} \neq 0$

よって、すべての自然数  $n$  に対して、 $a_n \neq 0$  (数学的帰納法)

与式で、両辺の逆数をとると、
$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{s}{p} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{r}{p}$$

$\frac{1}{a_n} = b_n$  とおくと、 $b_1 = \frac{1}{a_1}$ 、 $b_{n+1} = \frac{s}{p}b_n + \frac{r}{p}$

[1] の解法により、 $b_n$  を求め、 $a_n \left[ = \frac{1}{b_n} \right]$  を求める。

数学的帰納法

① 数学的帰納法

- [1] 命題  $P(1)$  が成り立つ。(  $n=1$  のとき成り立つ。 )  
 [2] 任意の自然数  $k$  に対して (  $k=1, 2, 3, \dots$  )  
 「命題  $P(k)$  が成り立つ」と仮定すれば、「命題  $P(k+1)$  が成り立つ」  

$$\left( \begin{array}{l} n=k \text{ のとき成り立てば、} n=k+1 \text{ のとき成り立つ。} \\ ( P(k) \Rightarrow P(k+1) ) \end{array} \right)$$
  
 [1],[2]を証明すれば、命題  $P(n)$  はすべての自然数  $n$  に対して成り立つ。

②  $n \geq m$  の帰納法

$m$  以上の自然数  $n$  に関する命題  $P(n)$  について ( $m$  はある自然数)

- [1] 命題  $P(m)$  が成り立つ。(  $n=m$  のとき成り立つ。 )  
 [2]  $m$  以上の任意の自然数  $k$  に対して (  $k=m, m+1, m+2, \dots$  )  
 「命題  $P(k)$  が成り立つ」と仮定すれば、「命題  $P(k+1)$  が成り立つ」  

$$\left( \begin{array}{l} k \geq m \text{ で } n=k \text{ のとき成り立てば、} n=k+1 \text{ のとき成り立つ。} \\ ( k \geq m \text{ とき、} P(k) \Rightarrow P(k+1) ) \end{array} \right)$$
  
 [1],[2]を証明すれば  
 命題  $P(n)$  は  $m$  以上のすべての自然数  $n$  に対して成り立つ。

③ 二段帰納法

自然数  $n$  に関する命題  $P(n)$  について

- [1] 命題  $P(1), P(2)$  が成り立つ。(  $n=1, 2$  のとき成り立つ。 )  
 [2] 任意の自然数  $k$  に対して (  $k=1, 2, 3, \dots$  )  
 「命題  $P(k), P(k+1)$  が成り立つ」と仮定すれば  
 「命題  $P(k+2)$  が成り立つ」  

$$\left( \begin{array}{l} n=k, k+1 \text{ のとき成り立てば、} n=k+2 \text{ のとき成り立つ。} \\ ( P(k), P(k+1) \Rightarrow P(k+2) ) \end{array} \right)$$
  
 [1],[2]を証明すれば、命題  $P(n)$  はすべての自然数  $n$  に対して成り立つ。

④ 多段帰納法

自然数  $n$  に関する命題  $P(n)$  について

- [1] 命題  $P(1)$  が成り立つ。  
 [2] 任意の自然数  $k$  に対して、(  $k=1, 2, 3, \dots$  )  
 「命題  $P(k)$  が  $k$  以下のすべての自然数に対して成り立つ」と仮定すれば  
 「命題  $P(k+1)$  が成り立つ」  

$$\left( \begin{array}{l} n=1, 2, 3, \dots, k \text{ のとき成り立てば、} n=k+1 \text{ のとき成り立つ。} \\ ( P(1), P(2), P(3), \dots, P(k) \Rightarrow P(k+1) ) \end{array} \right)$$
  
 [1],[2]を証明すれば、命題  $P(n)$  はすべての自然数  $n$  に対して成り立つ。