数列の公式･まとめ

公式の証明・原理等は、各自で教科書等で確認しておくこと

等差数列の一般項の公式

初項 a、公差 d の等差数列の一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d$$

等差数列の和の公式

初項 a、公差 d の等差数列の
初項から第 n 項（末項 $l = a + (n-1)d$）までの和 S_n は（項数 n）

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

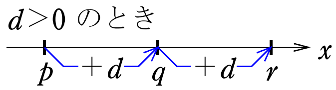
等差数列をなす3数（等差中項）

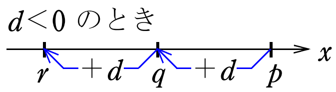
3つの数 $p,\ q,\ r$ について

$p,\ q,\ r$ がこの順に等差数列をなす

$\Leftrightarrow$　$p = a - d,\ \ q = a.\ \ r = a + d$（公差 d）

$\Leftrightarrow$　$2q = p + r$　$\left(q = \dfrac{p+r}{2}\ \text{（等差中項）} \right)$





㊟［1］$p,\ q,\ r$ が正の数のとき、q は、p と r の **相加平均** になる。

［2］$p,\ q,\ r$ がこの順に公差 d の等差数列をなす

$\Leftrightarrow$　$r,\ q,\ p$ がこの順に公差 $-d$ の等差数列をなす

等比数列の一般項の公式

初項 a、公比 r の等比数列の一般項 a_n は

$$a_n = ar^{n-1}$$

等比数列の和の公式

初項 a、公比 r の等比数列の初項から第 n 項（項数 n）までの和 S_n は

（$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1}$）

$$\begin{cases} r \neq 1 \text{ のとき、} S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} \\ r = 1 \text{ のとき、} S_n = na \end{cases}$$

等比数列をなす3数（等比中項）

3つの数 $a,\ b,\ c$ について

$a,\ b,\ c$ がこの順に等比数列をなす

$\Leftrightarrow\quad a,\ b=ar,\ c=ar^2$　（公比 r）

$\Leftrightarrow\quad b^2=a\quad \left(b=\pm\sqrt{ac}\right.$（**等比中項**）$\left.\right)$

㊟ ［1］ $a,\ b,\ c$ が正の数のとき、b は、a と c の **相乗平均** になる。

［2］ $a,\ b,\ c$ がこの順に、公比 $r\ (\neq 0)$ の等比数列をなす

$\Leftrightarrow\quad c,\ b,\ a$ がこの順に、公比 $\dfrac{1}{r}$ の等比数列をなす

Σの性質

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$　（複号同順）

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}pa_k=p\sum_{k=1}^{n}a_k$　（p は変数 k に無関係な定数）

㊟ ①, ② より、$p,\ q$ を変数 k に無関係な定数として

$$\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k$$

累乗の和の公式

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$　（初項1、末項 n、項数 n (公差1) の等差数列の和）

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$　$\left(=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2\right)$

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p=np$　（p は変数 k に無関係な定数）　特に、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=n$

⑤ $r\neq 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

(初項 a、公比 r、項数 n の等比数列の和の公式)

$$\left(=a\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}=a(1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1})\right)$$

階差数列から元の数列の一般項を求める公式

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とするとき $\left(\ b_n = a_{n+1} - a_n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\ \right)$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_{n-1})$$
$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ \cdots\cdots \ a_{n-1} \quad a_n \quad a_{n+1}$

$+b_1 \quad +b_2 \ \cdots\cdots\cdots \ +b_{n-1} \quad +b_n$

累乗の和公式 階差数列版（ $n \to n-1$ ）

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} = \frac{1}{2}n(n-1)$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\} = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}\right\}^2 = \left\{\frac{1}{2}n(n-1)\right\}^2 \quad \left(= \frac{1}{4}n^2(n-1)^2 \right)$

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} p = (n-1)p$　（p は変数 k に無関係な定数）　特に、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1$

⑤ $r \neq 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots fp \cdots + ar^{n-2} = \frac{a(1-r^{n-1})}{1-r} = \frac{a(r^{n-1}-1)}{r-1}$$

（初項 a、公比 r、項数 $n-1$ の等比数列の和の公式）

$$\left(= a\sum_{k=1}^{n-1} r^{k-1} = a(1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-2}) \right)$$

和 S_n から一般項 a_n を求める公式

数列 $\{a_n\}$ において、初項から第 n 項までの和を S_n とすると
数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は

$$\begin{cases} (n=1 \text{ のとき})\ a_1 = S_1 & \text{（初項）} \\ n \geqq 2 \text{ のとき、}\ a_n = S_n - S_{n-1} & \text{（第2項以降）} \end{cases}$$

部分分数分解による分数型の数列の和

基本例

部分分数分解　$\dfrac{1}{\{a+(k-1)d\}\cdot(a+kd)}=\dfrac{1}{d}\cdot\left\{\dfrac{1}{a+(k-1)d}-\dfrac{1}{a+kd}\right\}$

$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$

上記の **部分分数分解** を用いて

$$\frac{1}{a\cdot(a+d)}+\frac{1}{(a+d)\cdot(a+2d)}+\frac{1}{(a+2d)\cdot(a+3d)}+\cdots\cdots+\frac{1}{\{a+(n-1)d\}\cdot(a+nd)}$$

$$=\frac{1}{d}\cdot\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}\right)+\left(\frac{1}{a+d}-\frac{1}{a+2d}\right)+\left(\frac{1}{a+2d}-\frac{1}{a+3d}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{a+(n-1)d}-\frac{1}{a+nd}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{d}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+nd}\right)$$

(等差数列)×(等比数列) の項の和

初項 a、公差 d の等差数列 $\{a_n\}$: $a_n=a+(n-1)d$
初項 b、公比 $r\ (\neq 1)$ の等比数列 $\{b_n\}$: $b_n=br^{n-1}$　　に対して

和 $S_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdots+a_nb_n$　$\left(=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k\right)$

$=a\cdot b+(a+d)\cdot br+(a+2d)\cdot br^2+\cdots\cdots+\{a+(n-1)d\}\cdot br^{n-1}$　は

$$\begin{array}{rl}
S_n= & a\cdot b+(a+d)\cdot br+(a+2d)\cdot br^2+\cdots\cdots+\{a+(n-1)d\}\cdot br^{n-1}\\
-)\ rS_n= & \qquad a\cdot br+(a+d)\cdot br^2+\cdots\cdots+\{a+(n-2)d\}\cdot br^{n-1}+\{a+(n-1)d\}\cdot br^n\\
\hline
(1-r)S_n= & a\cdot b+d\cdot br+d\cdot br^2+\cdots\cdots+d\cdot br^{n-1}-\{a+(n-1)d\}\cdot br^n
\end{array}$$

$$(1-r)S_n=ab+dbr\cdot\frac{1-r^{n-1}}{1-r}-\{a+(n-1)d\}br^n$$

$$\therefore\ S_n=\frac{ab-\{a+(n-1)d\}br^n}{1-r}+\frac{dbr(1-r^{n-1})}{(1-r)^2}$$　(この形でもよい。)

$$=\frac{b\{a(1-r)+dr\}-b(a+nd)r^n+\{a+(n-1)d\}r^{n+1}}{(1-r)^2}$$

群数列

1つの数列を、初項から順に
第 n 群が、$f(n)$ 個 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の項を含むように、群に分ける。

[(第 m 群の第 l 番目) → (第 n 項)]
$m\geqq 2$ のとき、$n=\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(m-1)\}+l$
($n=$(第 $(m-1)$ 群までの項数)$+l$)

[(第 n 項) → (第 m 群の第 l 番目)]

① 第 n 項が第何群にあるかを求める。
第 n 項が第 m 群にあるとすると
$m\geqq 2$ のとき
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(m-1)<n\leqq f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(m)$
((第 $(m-1)$ 群までの項数)$<n\leqq$(第 m 群までの項数))
この不等式を満たす自然数 m を求める。

② 第 n 項が第 m 群の第何番目であるかを求める。
第 n 項が第 m 群の第 l 番目であるとすると
$m\geqq 2$ のとき、$l=n-\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(m-1)\}$
($l=n-$(第 $(m-1)$ 群までの項数))

漸化式の解法（数列の第 n 項(一般項)を求める）の原理

次の①～③の3つのいずれかの形になって、漸化式は解ける。

① **等差数列（階差が一定）**

$X_1=a,\ X_{n+1}=X_n+d\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

⇒　数列 $\{X_n\}$ は、初項 a、公差 d の等差数列

⇒　$X_n=a+(n-1)d$　(等差数列の第 n 項(一般項))

② **等比数列**

$Y_1=a,\ Y_{n+1}=rY_n\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

⇒　数列 $\{Y_n\}$ は、初項 a、公比 r の等比数列

⇒　$Y_n=ar^{n-1}$　(等比数列の第 n 項(一般項))

③ **階差数列が分かる形**

$Z_1=a,\ Z_{n+1}=Z_n+f(n)\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

⇒　数列 $\{Z_n\}$ の階差数列が、数列 $\{f(n)\}$ （数列 $\{Z_n\}$ の初項は a）

⇒　$n\geqq 2$ のとき、$Z_n=a+\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n-1)\}$

$$=a+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$$　(第 n 項(一般項))

[1] 隣接2項間の漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq 0, 1,\ q\neq 0)$ の解法

《解法1》[数列 $\{a_n-\alpha\}$ を等比数列にする]

与式より、$a_{n+1}=pa_n+q$ … ①

$\alpha\ =p\alpha+q$ … ② **(特性方程式)**　$\left(\alpha=\dfrac{q}{1-p}\right)$

①－②　$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$

すなわち、数列 $\{a_n-\alpha\}$ は、公比 p の等比数列である。また、初項 $a_1-\alpha$

よって、$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$　　$\therefore\ a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$

注 この解法のポイントは、「数列 $\{a_n-\alpha\}$ が等比数列になるように定数 α の値を定める。」ということである。
与式より、$a_{n+1}-\alpha=pa_n+q-\alpha=p(a_n-\alpha)+p\alpha+q-\alpha$
よって、$\alpha=p\alpha+q$（$(p-1)\alpha+q=0$）**(特性方程式)** となるように、
定数 α **(特性解)** の値を定めればよい。

《解法2》[階差数列の利用]

与式より、$a_{n+2}=pa_{n+1}+q$ … ③

$a_{n+1}=pa_n\ +q$ … ①

③－①　$a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ とすると（$b_n=a_{n+1}-a_n$）

$b_{n+1}=pb_n$　　すなわち、数列 $\{b_n\}$ は、公比 p の等比数列である。

また、初項 $b_1=a_2-a_1=(pa_1+q)-a_1$

よって、$b_n=b_1p^{n-1}$

[1] $n=1$ のとき、$a_n=a_1$

[2] $n\geqq 2$ のとき、$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_1p^{k-1}$

[2] 隣接2項間の漸化式 $a_{n+1}=pa_n+qr^n$（$p\neq0, 1,\ q\neq0$）の解法

《解法1》［[1]に帰着（r^nを消去）］

与式の両辺を r^{n+1} で割ると、$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}}=\dfrac{p}{r}\cdot\dfrac{a_n}{r^n}+\dfrac{q}{r}$

$b_n=\dfrac{a_n}{r^n}$ とおくと、$b_1=\dfrac{a_1}{r}$，$b_{n+1}=\dfrac{p}{r}b_n+\dfrac{q}{r}$

[1]の解法により、b_nを求め、a_n（$=r^nb_n$）を求める。

《解法2》［**階差数列が分かる形**に帰着］

与式の両辺を p^{n+1} で割ると、$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{q}{p}\left(\dfrac{r}{p}\right)^n$

$c_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ とおくと、$c_1=\dfrac{a_1}{p}$，$c_{n+1}=c_n+\dfrac{q}{p}\left(\dfrac{r}{p}\right)^n$

よって、数列$\{c_n\}$の階差数列が、$\left\{\dfrac{q}{p}\left(\dfrac{r}{p}\right)^n\right\}$ である。（**階差数列が分かる形**）

この階差数列から、c_nを求め、a_n（$=p^nc_n$）を求める。

[3] 隣接3項間の漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$（$p\neq0,\ q\neq0$）の解法

《解法》［隣接3項間の漸化式の基本変形］

与えられた漸化式より、**特性方程式** $t^2+pt+q=0$ を作り、この方程式の解をα,βとすると、解と係数の関係より、$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$

よって、与式は、$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ … ① と変形される。

（$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ … ②）

すなわち、数列$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$は、公比βの等比数列である。

また、初項 $a_2-\alpha a_1$

よって、$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$ … ①'

（②より、同様にして、$a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}$ … ②'）

①'－②' から、a_nを求める。

注 ①の変形のポイントは、「数列$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$が等比数列になるように定数αの値を定める。」ということである。この等比数列の公比をβとすれば、$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

これを与式と比較すると、$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$ となるα,βを求めればよい。この定数α,β（**特性解**）を求める2次方程式が

特性方程式 $t^2+pt+q=0$ である。（解と係数の関係）

[4] 分数型の漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{ra_n+s}$（$p\neq0,\ r\neq0,\ s\neq0,\ a_1\neq0$）の解法

《解法》［両辺の逆数をとって、**[1] 隣接2項間の漸化式**に帰着］

まず、$a_1\neq0$　　また、与式より、$a_n\neq0$ ならば、$a_{n+1}\neq0$

よって、すべての自然数nに対して、$a_n\neq0$（**数学的帰納法**）

与式で、両辺の逆数をとると、$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{s}{p}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{r}{p}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと、$b_1=\dfrac{1}{a_1}$，$b_{n+1}=\dfrac{s}{p}b_n+\dfrac{r}{p}$

[1]の解法により、b_nを求め、$a_n\left(=\dfrac{1}{b_n}\right)$ を求める。

数学的帰納法

① 数学的帰納法

［1］命題$P(1)$が成り立つ。（$n=1$ のとき成り立つ。）

［2］任意の自然数kに対して（$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$）
「命題$P(k)$が成り立つ」と仮定すれば、「命題$P(k+1)$が成り立つ」

（ $n=k$ のとき成り立てば、$n=k+1$ のとき成り立つ。
（ $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ））

［1］,［2］を証明すれば、命題$P(n)$はすべての自然数nに対して成り立つ。

② $n \geqq m$ の帰納法

m以上の自然数nに関する命題$P(n)$について（mはある自然数）

［1］命題$P(m)$が成り立つ。（$n=m$ のとき成り立つ。）

［2］m以上の任意の自然数kに対して（$k=m, m+1, m+2, \cdots\cdots$）
「命題$P(k)$が成り立つ」と仮定すれば、「命題$P(k+1)$が成り立つ」

（ $k \geqq m$ で $n=k$ のとき成り立てば、$n=k+1$ のとき成り立つ。
（ $k \geqq m$ とき、$P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ））

［1］,［2］を証明すれば
命題$P(n)$はm以上のすべての自然数nに対して成り立つ。

③ 二段帰納法

自然数nに関する命題$P(n)$について

［1］命題$P(1)$, $P(2)$が成り立つ。（$n=1, 2$ のとき成り立つ。）

［2］任意の自然数kに対して（$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$）
「命題$P(k)$, $P(k+1)$が成り立つ」と仮定すれば
「命題$P(k+2)$が成り立つ」

（ $n=k, k+1$ のとき成り立てば、$n=k+2$ のとき成り立つ。
（ $P(k), P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$ ））

［1］,［2］を証明すれば、命題$P(n)$はすべての自然数nに対して成り立つ。

④ 多段帰納法

自然数nに関する命題$P(n)$について

［1］命題$P(1)$が成り立つ。

［2］任意の自然数kに対して、（$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$）
「命題$P(k)$がk以下のすべての自然数に対して成り立つ」と仮定すれば
「命題$P(k+1)$が成り立つ」

（ $n=1, 2, 3, \cdots\cdots, k$ のとき成り立てば、$n=k+1$ のとき成り立つ。
（ $P(1), P(2), P(3), \cdots\cdots, P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ））

［1］,［2］を証明すれば、命題$P(n)$はすべての自然数nに対して成り立つ。