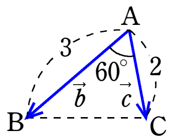
有名問題　三角形の外心・垂心の位置ベクトル　(1)の類題：サクシード 数学B $p.132$ 173

$\mathrm{AB}=3,\ \mathrm{AC}=2,\ \angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ の三角形ABCがある。
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおく。

(1) 三角形ABCの外心をOとするとき、$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{b},\ \vec{c}$ で表せ。

(2) 三角形ABCの垂心をHとするとき、$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b},\ \vec{c}$ で表せ。

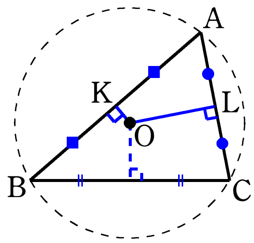
(1)
《解答》



$|\vec{b}|=3,\ |\vec{c}|=2,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=3$

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=p\vec{b}+q\vec{c}$ とおける。($p,\ q$は定数)

辺AB、辺ACの中点をそれぞれK, Lとすると
外心Oは辺ABと辺ACの垂直二等分線の交点であるので



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{KO}}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AK}}\right)=0$

$\vec{b}\cdot\left(p\vec{b}+q\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)=0 \qquad \left(p-\dfrac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2+q\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=0$

$3^2\cdot\left(p-\dfrac{1}{2}\right)+3q=0 \qquad 6p+2q=3\ \cdots$ ①

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{LO}}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AL}}\right)=0$

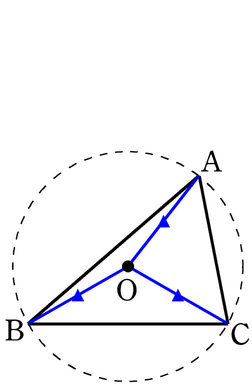
$\vec{c}\cdot\left(p\vec{b}+q\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)=0 \qquad p\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)+\left(q-\dfrac{1}{2}\right)|\vec{c}|^2=0$

$3p+2^2\cdot\left(q-\dfrac{1}{2}\right)=0 \qquad 3p+4q=2\ \cdots$ ②

①×2−②　$9p=4$　　$\therefore\ p=\dfrac{4}{9}$　　②×2−①　$6q=1$　　$\therefore\ q=\dfrac{1}{6}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

《別法1》[《解答》の途中から]
点Oは三角形ABCの外接円の中心であるので



$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|$

$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$\qquad=|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$

辺々から、$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2$ を引いて

$0=-2\,\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=-2\,\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$

$0=-2\left(p\vec{b}+q\vec{c}\right)\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=-2\left(p\vec{b}+q\vec{c}\right)\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$0=-2(p\cdot3^2+q\cdot3)+3^2=-2(p\cdot3+q\cdot2^2)+2^2$

$6p+2q=3$ … ①　　$3p+4q=2$ … ②

（以下《解答》と同じ）

《別法2》［《解答》の途中から］

点Oは三角形ABCの外接円の中心であるので、$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{CO}|$

$$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AC}|^2$$

$$|p\vec{b}+q\vec{c}|^2=|(p\vec{b}+q\vec{c})-\vec{b}|^2=|(p\vec{b}+q\vec{c})-\vec{c}|^2$$

$$p^2|\vec{b}|^2+2pq\,\vec{b}\cdot\vec{c}+q^2|\vec{c}|^2=(p-1)^2|\vec{b}|^2+2(p-1)q(\vec{b}\cdot\vec{c})+q^2|\vec{c}|^2$$
$$=p^2|\vec{b}|^2+2p(q-1)(\vec{b}\cdot\vec{c})+(q-1)^2|\vec{c}|^2$$

$$p^2\cdot3^2+2pq\cdot3+q^2\cdot2^2=(p-1)^2\cdot3^2+2(p-1)q\cdot3+q^2\cdot2^2$$
$$=p^2\cdot3^2+2p(q-1)\cdot3+(q-1)^2\cdot2^2$$

辺々から、$p^2\cdot3^2+2pq\cdot3+q^2\cdot2^2$ を引いて

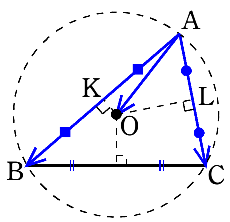
$$0=(-2p+1)\cdot3^2-2q\cdot3=-2p\cdot3+(-2q+1)\cdot2^2$$

$6p+2q=3$ … ①　　$3p+4q=2$ … ②

（以下《解答》と同じ）

《別解》［《解答》の途中から］

辺AB、辺ACの中点をそれぞれK, Lとすると、外心Oは、辺ABと辺ACの垂直二等分線の交点であるので、AB⊥OK，AC⊥OL



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AO}|\cos\angle BAO=AB\cdot AK=\frac{AB^2}{2}=\frac{9}{2}$$

一方、$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\vec{b}\cdot(p\vec{b}+q\vec{c})=p|\vec{b}|^2+q(\vec{b}\cdot\vec{c})=3^2p+3q$

$\therefore\ 6p+2q=3$ … ①

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AO}|\cos\angle CAO=AC\cdot AL=\frac{AC^2}{2}=2$$

一方、$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\vec{c}\cdot(p\vec{b}+q\vec{c})=p(\vec{b}\cdot\vec{c})+q|\vec{c}|^2=3p+4q$

$\therefore\ 3p+4q=2$ … ②

（以下《解答》と同じ）

《解説》

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は、平面上1次独立なベクトルであるので、$\overrightarrow{AO}$ は $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せる。

《解答》、《別解》では、「外心Oは辺ABと辺ACの垂直二等分線の交点である、言い換えると、辺AB、ACの中点をそれぞれ、K, Lとすると、AB⊥OK，AB⊥OL」という外心の性質を用いた。《別法1》、《別法2》では、外心の定義「OA＝OB＝OC」を用いた。《別法1》はできるだけ $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のまま計算して、これ以上この形では計算できないようになってから $\overrightarrow{AO}=p\vec{b}+q\vec{c}$ を代入した。《別法2》では、最初から $\overrightarrow{AO}=p\vec{b}+q\vec{c}$ を代入した。《別法1》の方が《別法2》より計算は見易い。

しかし

$$|\overrightarrow{AO}|^2=|p\vec{b}+q\vec{c}|^2=p^2|\vec{b}|^2+2pq(\vec{b}\cdot\vec{c})+q^2|\vec{c}|^2=p^2\cdot3^2+2pq\cdot3+q^2\cdot2^2$$

に気付けば、どちらの計算も本質的には同じである。

《別解》は、次の「**【参考】正射影ベクトル**」の考え方を用いている。
すなわち、$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ の、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 上への**正射影ベクトル**は、$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ であり
$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ の、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 上への**正射影ベクトル**は、$\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ である。

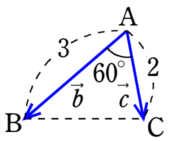
《解答》の　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AK}})=0 \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AK}}$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{\mathrm{AB}^2}{2}$$

《別法1》の　$0=-2\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{\mathrm{AB}^2}{2}$

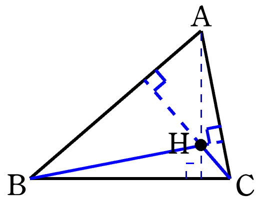
これらの式は、《別解》の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{\mathrm{AB}^2}{2}$ と同じ式になり、これら4つの解法は本質的に同じとも言える。実際、$s,\ t$ の同じ連立方程式になっている。

(2)
《解答》



$|\vec{b}|=3,\ \ |\vec{c}|=2,\ \ \vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=3$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=r\vec{b}+s\vec{c}$ とおける。($r,\ s$ は定数)
垂心Hの定義より



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=0$

$\vec{b}\cdot(r\vec{b}+s\vec{c}-\vec{c})=0$　　$r|\vec{b}|^2+(s-1)(\vec{b}\cdot\vec{c})=0$

$3^2\cdot r+3(s-1)=0$　　$3r+s=1$ … ③

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BH}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=0$

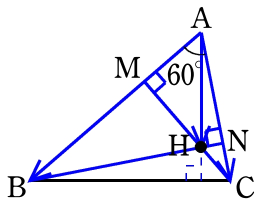
$\vec{c}\cdot(r\vec{b}+s\vec{c}-\vec{b})=0$　　$(r-1)(\vec{b}\cdot\vec{c})+s|\vec{c}|^2=0$

$3(r-1)+2^2\cdot s=0$　　$3r+4s=3$ … ④

③×4−④　$9r=1$　　$\therefore\ r=\dfrac{1}{9}$　　④−②　$3s=2$　　$\therefore\ s=\dfrac{2}{3}$

よって、$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

《別解》[《解答》の途中から]



頂点Cから辺ABに下ろした垂線の足をM、頂点Bから
辺ACに下ろした垂線の足をNとすると、垂心Hの定義より
AB⊥HM (AB⊥CM), AC⊥HN (AC⊥BN)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AH}}|\cos\angle\mathrm{BAH}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AM}$

$=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos60^\circ=3$

一方、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\vec{b}\cdot(r\vec{b}+s\vec{c})=r|\vec{b}|^2+s(\vec{b}\cdot\vec{c})=3^2r+3s$　　$\therefore\ 3r+s=1$ … ③

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{AH}}|\cos\angle\mathrm{CAH}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AN}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cos60^\circ=3$

一方、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\vec{c}\cdot(r\vec{b}+s\vec{c})=r(\vec{b}\cdot\vec{c})+s|\vec{c}|^2=3r+4s$　　$\therefore\ 3r+4s=3$ … ④

(以下《解答》と同じ)

《解説》
$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は、平面上1次独立なベクトルであるので、$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せる。
垂心の定義「各頂点から対辺に引いた垂線の交点が垂心である」を用いて立式した。

《別解》は、次の「**【参考】正射影ベクトル**」の考え方を用いている。すなわち、
$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 上への**正射影ベクトル**と、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 上への**正射影ベクトル**は、ともに $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ で一致し、$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 上への**正射影ベクトル**と、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 上への**正射影ベクトル**は、$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ で一致する。

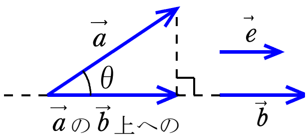
《解答》の　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=0 \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos 60^\circ \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=3$$

この式は、《別解》の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=3$ と同じ式になり、この2つの解法は本質的に同じとも言える。実際、$s,\ t$ の同じ連立方程式になっている。

【参考】正射影ベクトル（正射影）

ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とし
$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}\left(=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ とするとき



$$\left(|\vec{a}|\cos\theta\right)\vec{e}$$

を、ベクトル $\vec{a}$ のベクトル $\vec{b}$ 上への**正射影ベクトル**と言う。
この**正射影ベクトル**は、$(\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e}\ \left(=\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}\right)$ とも表すことができる。