同一点、同一直線上、同一平面上

(1) 同一点（2点の一致 **共点**）

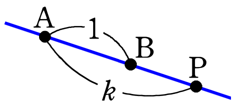
2つの点 $P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$ が一致 $\Leftrightarrow$ $\vec{p}=\vec{q}$ $(\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ})$ （**共点条件**）

（点Pと点Qの位置ベクトルが等しい。）

(2) 同一直線上（**共線**）

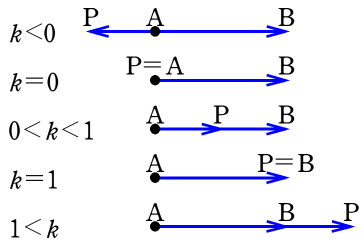
① 点Pが直線AB上にある（**共線**）

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ （kは実数）



このとき、$AB:AP=1:k$（有向線分の比）

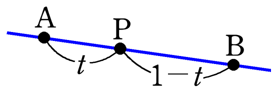
㊟ 点Pの位置は
$k<0$ のとき、点A側の延長上
$k=0$ ($\overrightarrow{AP}=\vec{0}$) のとき、点Aの位置
$0<k<1$ のとき、点Aと点Bの間
$k=1$ ($\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}$) のとき、点Bの位置
$1<k$ のとき、点B側の延長上



② 点Pが直線AB上にある（**共線**）

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ （tは実数）

（点Oに関する位置ベクトルによる表現）



このとき、点Pは、線分ABを $t:(1-t)$ の比に**分ける**点（**内分点**または**外分点**）である。

㊟ 点Pの位置は、$t<0$ のとき、点A側の延長上（**外分点**）
$t=0$ ($\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}$) のとき、点Aの位置
$0<t<1$ のとき、点Pは、線分ABの**内分点**
$t=1$ ($\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}$) のとき、点Bの位置
$1<t$ のとき、点B側の延長上（**外分点**）

㊟ ① $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$ （始点をOに）

$\Rightarrow$ ② $\overrightarrow{OP}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$

② $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AO}=(1-t)(-\overrightarrow{AO})+t(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})$

（始点をAに）

$\Rightarrow$ ① $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

（②でOをAとすると、$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AA}+t\overrightarrow{AB}$ よって、① $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ ）

以上より、①と②は表現は違うが、本質的に同じ式である。

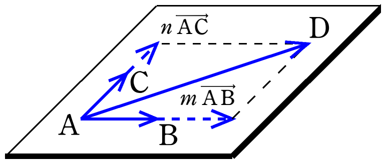
(3) 空間内での同一平面上（**共面**）

空間内の、同一直線上にない3つの点A, B, Cと点Dについて
（平面ABCができる、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が**1次独立**）

4つの点A, B, C, Dは同一平面上にある。（**共面**）

$\Leftrightarrow$ ① $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ （m, nは実数）

（3つの点A, B, Cを含む平面（平面ABC）上に、点Dがある。）



$\Leftrightarrow$ ② $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ （$l+m+n=1$）
（点Oに関する位置ベクトルによる表現）

（$\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ （$l+m+n=1$）
ただし、A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$, C$(\vec{c})$, D$(\vec{d})$）

《解説》

① $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ （m, nは実数）

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=m\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+n\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$ （始点をOに）

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-m-n)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$1-m-n=l$ とおくと

$\Rightarrow$ ② $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ （$l+m+n=1$）

逆に

② $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ （$l+m+n=1$）

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=l\left(-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)+m\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)+n\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)$ （始点をAに）

$\Rightarrow$ ① $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

（②でOをAとすると、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=l\overrightarrow{\mathrm{AA}}+m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ （$l+m+n=1$）
よって、① $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$）