有名問題	内積の等式からの三角形、四角形の形状	(1)：サクシード 数学B $p.128$ 重要例題30 チャート式 数学B $p.365$ 基本例題35(2) (2)：サクシード 数学B $p.129$ 159（改題）

(1)　三角形ABCにおいて、$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ が成り立つとき、三角形ABCはどのような形の三角形か。

(2)　四角形ABCDにおいて、$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}$ が成り立つとき、四角形ABCDはどのような形の四角形か。

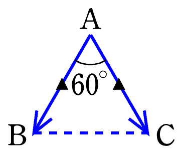
(1)

《解答》

与式より、$(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{AC})=(-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$-|\overrightarrow{AC}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AB}|^2$

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|,\ \ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2\ \left(=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2\right)$



よって、AB＝AC

また、$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \angle BAC=60^\circ$

したがって、三角形ABCは正三角形である。

《別法1-1》［《解答》の途中から］

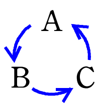
$\therefore\ |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|,\ \ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2\ \left(=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2\right)$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2\ (=|\overrightarrow{AC}|^2)$

よって、AB＝BC＝CA　　したがって、三角形ABCは正三角形である。

《別法1-2》［《解答》の途中から］

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$　　同様にして、$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BA}|,\ |\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|$



よって、AB＝BC＝CA　　したがって、三角形ABCは正三角形である。

《別法2》

位置ベクトル $A(\vec{a}),\ B(\vec{b}),\ C(\vec{c})$ とおくと、与式より

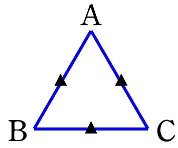
$(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-|\vec{c}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2$

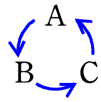
(左辺)＝(中辺) より、$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{b}-\vec{c}|^2$　　$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{c}|$　　よって、BA＝CB

同様にして、(中辺)＝(右辺) より、$|\vec{b}-\vec{c}|=|\vec{c}-\vec{a}|$
よって、CB＝AC
(左辺)＝(右辺) より、$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{c}-\vec{a}|$
よって、BA＝AC
したがって、三角形ABCは正三角形である。



《解説》
位置ベクトルの始点(基準)を、《解答》、《別法1-1》では点Aに、《別法2》では適当な点Oにおいた。
《解答》では、AB＝AC と ∠BAC＝60° より、三角形ABCは正三角形であるとした。
《別法1-1》では、《解答》の ∠BACに替えて、辺BCの長さを求めて
AB＝BC＝CA を示し、三角形ABCは正三角形であるとした。
《別法1-2》は、与えられた条件式のA, B, Cに関する対称性を利用した。
すなわち、$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ を示した後、「同様にして」ということで
輪環の順(*cyclic*)に、AをBに、BをCに、CをAに置き換えて
$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BA}|$, $|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|$ を示し
三角形ABCは正三角形であるとした。

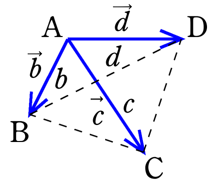


《別法2》も、与式のA, B, Cに関する対称性を利用した。結論は「三角形ABCは正三角形」と予想して、$|\vec{b}-\vec{c}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2$ 等の形を与式から作った。
《解答》、《別法1-1》、《別法1-2》の方が、《別法2》よりも簡明であろう。

(2)
《解答》
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおくと、与式より

$$\vec{d}\cdot\vec{b}=(-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{d}-\vec{c})=(\vec{c}-\vec{d})\cdot(-\vec{d})$$

$$\vec{d}\cdot\vec{b}=-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=\vec{d}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=-\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2$$



ここで
$|\vec{b}|=b$, $|\vec{c}|=c$, $|\vec{d}|=d$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=p$, $\vec{c}\cdot\vec{d}=q$, $\vec{d}\cdot\vec{b}=r$
とおくと、$r=-p+b^2=r-p-q+c^2=-q+d^2$

$$r+p=b^2\ \cdots ①,\quad p+q=c^2\ \cdots\cdots ②,\quad q+r=d^2\ \cdots ③$$

$$(①+②+③)\div 2\quad p+q+r=\frac{b^2+c^2+d^2}{2}\ \cdots ④$$

$$④-③\quad p=\frac{b^2+c^2-d^2}{2}\qquad ④-①\quad q=\frac{-b^2+c^2+d^2}{2}\qquad ④-②\quad r=\frac{b^2-c^2+d^2}{2}$$

よって、$BC^2=|\overrightarrow{BC}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=c^2-2\cdot\dfrac{b^2+c^2-d^2}{2}+d^2$

$$=d^2=AD^2\qquad \therefore\ BC=AD$$

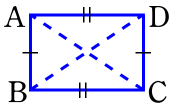
$$CD^2=|\overrightarrow{CD}|^2=|\vec{d}-\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{c}|^2=d^2-2\cdot\frac{-b^2+c^2+d^2}{2}+c^2$$

$$=b^2=AB^2\qquad \therefore\ CD=BA$$

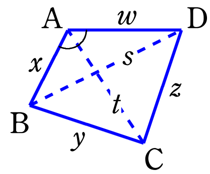
$$DB^2=|\overrightarrow{DB}|^2=|\vec{b}-\vec{d}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{d}\cdot\vec{b}+|\vec{d}|^2=b^2-2\cdot\frac{b^2-c^2+d^2}{2}+d^2$$

$$=c^2=AC^2\qquad \therefore\ BD=AC$$

2組の対辺がそれぞれ等しく、対角線が等しいので
四角形ABCDは、長方形である。



《別法1-1》



AB$=x$, BC$=y$, CD$=z$, DA$=w$, BD$=s$, AC$=t$ とおく。

$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{w^2+x^2-s^2}{2}$$

同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{x^2+y^2-t^2}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{y^2+z^2-s^2}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\frac{z^2+w^2-t^2}{2}$$

これらの式を与式に代入して

$$\frac{w^2+x^2-s^2}{2}=\frac{x^2+y^2-t^2}{2}=\frac{y^2+z^2-s^2}{2}=\frac{z^2+w^2-t^2}{2}$$

$w^2+x^2=y^2+z^2$ …⑤,　$x^2+y^2=z^2+w^2$ …⑥,　$w^2-s^2=y^2-t^2$ …⑦

⑤＋⑥より、$x^2=z^2$　　$\therefore\ x=z$

⑤より、$w^2=y^2$　　$\therefore\ w=y$　　⑦より、$s^2=t^2$　　$\therefore\ s=t$

逆に、$x=z$, $w=y$, $s=t$ のとき、与式は成り立つ。

（以下《解答》と同じ）

《別法1-2》

AB$=x$, BC$=y$, CD$=z$, DA$=w$, BD$=s$, AC$=t$ とおく。

三角形ABDに余弦定理を用いて、$s^2=w^2+x^2-2wx\cos\angle\mathrm{DAB}$

$$s^2=w^2+x^2-2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\qquad \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{w^2+x^2-s^2}{2}$$

（以下《別法1-1》と同じ）

《別解1》

与式の $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})$

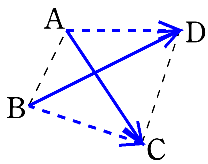
$0=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})$　　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$ …⑤

また、与式の $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ より、$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}})$

$0=\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})$　　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})=0$ …⑥

ここで、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ は $\vec{0}$ でなく、平行でもないので（1次独立）

⑤, ⑥より、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{0}$　　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$



すなわち、四角形ABCDは平行四辺形で、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

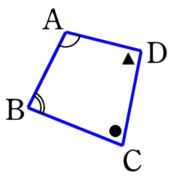
このとき、与式は

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

となり、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$　　$\therefore$ AB$\perp$AD　　よって、四角形ABCDは長方形である。

《別解2》

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}>0$ とすると
　$\angle DAB<90^\circ$, $\angle ABC<90^\circ$, $\angle BCD<90^\circ$, $\angle CDA<90^\circ$ となり
　四角形ABCDの内角の和が 360° 未満となり矛盾

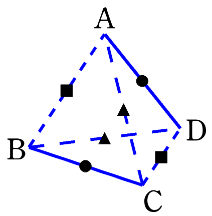


$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}<0$ とすると
　$\angle DAB>90^\circ$, $\angle ABC>90^\circ$, $\angle BCD>90^\circ$, $\angle CDA>90^\circ$ となり
　四角形ABCDの内角の和が 360° を超えるので矛盾

よって、$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=0$ であり
$\angle DAB=90^\circ$, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle BCD=90^\circ$, $\angle CDA=90^\circ$
したがって、四角形ABCDは長方形である。

《解説》

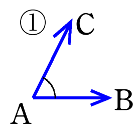
《解答》では、点Aを始点(基準)とする位置ベクトルを考えた。$\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ どうしの内積 p, q, r を、それぞれのベクトルの大きさ $|\vec{b}|=b$ (辺ABの長さ)、$|\vec{c}|=c$ (対角線ACの長さ)、$|\vec{d}|=d$ (辺ADの長さ)で表した式に、与式の条件を変形した。この形から判断して、これらの等式を利用するのは、他の辺BC、辺CDの長さと対角線BDの長さを求めるのがよいであろうと思われる。
《解答》と違って、《別法1−1》、《別法1−2》では、最初から、与式の条件を辺の長さ、対角線の長さの条件式に替えて解いている。文字の個数は多いが、1つずつ文字を消去する、この場合は、s, t を消去するように等式を変形、計算している。
《別解1》は、技巧的で思いつきにくいが計算は少し楽になる。
《別解2》は、四角形の内角に着目したうまい解法である。
下記の【参考】の事項を用いた。



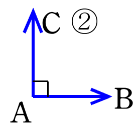
また、問題の設定を変えて、点A, B, C, Dが空間内にあるとすると、(空間ベクトル) この結果より、四面体ABCDは3組の対辺の長さが等しい四面体、言い換えると、各面が合同な四面体、いわゆる**等面四面体**になる。

【参考】ベクトルのなす角と内積の符号

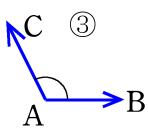
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$ であるので
$\angle BAC$ について



① $0^\circ\leqq\angle BAC<90^\circ$ ($\angle BAC$ は鋭角)
　　$\Leftrightarrow\ \cos\angle BAC>0\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$



② $\angle BAC=90^\circ$ ($\angle BAC$ は直角)
　　$\Leftrightarrow\ \cos\angle BAC=0\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$



③ $90^\circ<\angle BAC\leqq180^\circ$ ($\angle BAC$ は鈍角)
　　$\Leftrightarrow\ \cos\angle BAC<0\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$