有名問題	直交する2直線の交点の軌跡	サクシード 数学Ⅱ $p.51$ 367 参考：チャート式 数学Ⅱ $p.156$ 重要例題103
実数tの値が変化するとき、次の2本の直線の交点Pの軌跡を求めよ。 $y=t(x+2)$ … ①，$ty=2-x$ … ②		

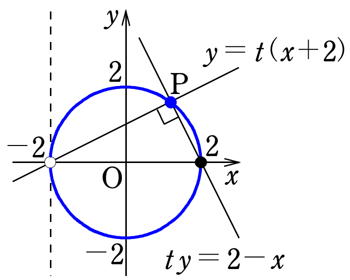
《解答》
交点$\mathrm{P}(X, Y)$とおくと、$Y=t(X+2)$ … ①′，$Yt=2-X$ … ②′

[1] $Y\neq 0$ のとき、②′より $t=\dfrac{2-X}{Y}$ を①′に代入して、$Y=\dfrac{2-X}{Y}(X+2)$
$X^2+Y^2=4$
この方程式で $Y=0$ とおくと、$X=\pm 2$　　よって、点$(\pm 2, 0)$を除く。

[2] $Y=0$ のとき、②′より、$X=2$　　このとき、①′より、$t=0$
すなわち、$t=0$ のとき、①′より $Y=0$ と ②′より $X=2$ で、$\mathrm{P}(2, 0)$となる。
($t=0$ のとき、与えられた2本の直線 $y=0$ と $x=2$ の交点は$(2, 0)$となる。)

[1],[2]より、求める点Pの軌跡は、円 $x^2+y^2=4$　ただし、点$(-2, 0)$を除く。

《別解》(初等幾何による解法)
直線①は、点$(-2, 0)$を通る傾きtの直線で
直線②は、点$(2, 0)$を通る $y=0$ 以外の直線である。
①と②は直交するので、点Pの軌跡は
この2つの点を直径の両端とする円、すなわち
原点中心、半径2の円になる。(右図)
ただし、①, ②はそれぞれ直線 $x=-2,\ y=0$
とはならないので、点$(-2, 0)$は除く。



《解説》
《解答》では、交点$\mathrm{P}(X, Y)$は、2本の直線の方程式に代入してともに成り立つとい
いう①′, ②′から、実数tを消去すればよい。「$Yt=2-X$ … ②′」の式から、[1],
[2]の場合分けが生じる。すなわち、Yで割れるか、割れないかの場合分けである。
「[2] $Y=0$ のとき」とは、①′, ②′の交点で、直線 $Y=0$ (X軸)上の交点を求めると
いう意味である。《解答》では、②′を使ったが、①′の式からtを消去する場合は、
$X\neq -2,\ X=-2$ で場合分けをすることになる。
ただし、$X=-2$ のとき、①′, ②′が矛盾するので、直線 $X=-2$ 上の交点は存在し
ないことになる。
また、①, ②のx, yの連立方程式を解いて、交点Pを求めると
$\mathrm{P}\left(\dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2},\ \dfrac{4t}{1+t^2}\right)$ となる。その後、$\mathrm{P}(x, y)$とおくと、$x=\dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2}$，$y=\dfrac{4t}{1+t^2}$
となり、これらの式からtを消去することは難しくなる。よって、《解答》のように、
tを消去する方が易しい。
《別解》では、[1] $t\neq 0$ のとき、①の傾きはt、②の傾きは$-\dfrac{1}{t}$より、$t\cdot\left(-\dfrac{1}{t}\right)=-1$、
[2] $t=0$ のとき、①：$y=0$，②：$x=2$ でどちらにしても、①と②は垂直である。
または、直線 $tx-y+2=0$ … ①，直線 $x+ty-2=0$ … ② として
$t\cdot 1+(-1)\cdot t=0$ より、①と②は垂直である。このことを利用している。

有名問題	放物線の直交する2接線の交点の軌跡	サクシード 数学Ⅱ $p.57$ 392 参考：チャート式 数学Ⅱ $p.153$ 182

点Pから放物線 $y=x^2$ に引いた2本の接線が直交するとき、
点Pの軌跡を求めよ

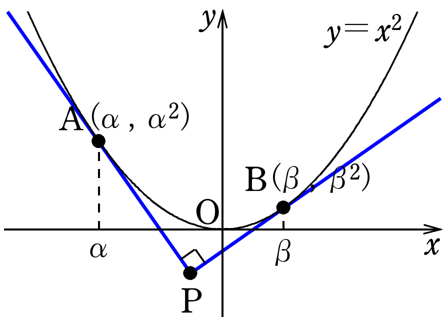
《解答》
$\mathrm{P}(X, Y)$ とおく。
点Pを通る傾き m の直線の方程式は、$y=m(x-X)+Y$ … ①

①と放物線 $y=x^2$ … ② より、$x^2=m(x-X)+Y$
$x^2-mx+(mX-Y)=0$ … ③

①と②が接するとすると、③の判別式 $D_1=(-m)^2-4(mX-Y)=0$
$m^2-4Xm+4Y=0$ … ④
題意より、m の2次方程式④は、異なる2つの実数解をもつので
判別式 $\dfrac{D_2}{4}=(-2X)^2-4Y>0$　　$Y<X^2$ … ⑤

ここで、④の異なる2つの実数解を m_1, m_2 とすると、解と係数の関係より
($m_1+m_2=4X$)，$m_1m_2=4Y$
2本の接線は直交するので、$m_1m_2=-1$
したがって、$Y=-\dfrac{1}{4}$　　これは、⑤を満たす。

（答）直線 $y=-\dfrac{1}{4}$



《別解1》
放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(\alpha, \alpha^2)$
における接線の方程式は、($y'=2x$)
$y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)$　　$y=2\alpha x-\alpha^2$ … ⑥
同様に、放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{B}(\beta, \beta^2)$ $(\beta\neq\alpha)$
における接線の方程式は、$y=2\beta x-\beta^2$ … ⑦
⑥と⑦より、$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$　　$2(\alpha-\beta)x=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$\therefore$　$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$y=2\alpha\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha^2=\alpha\beta$

⑥と⑦は直交するとして、$2\alpha\cdot2\beta=-1$　　$\alpha\beta=-\dfrac{1}{4}$

$\mathrm{P}(x, y)$ とおくと、$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$y=\alpha\beta=-\dfrac{1}{4}$

この条件で、$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ の取りうる値の範囲を求める。

$x=\dfrac{\alpha-\dfrac{1}{4\alpha}}{2}$ より、$4\alpha^2-8x\alpha-1=0$　　判別式 $\dfrac{D}{4}=(4x)^2+4>0$ より、実数 x の任意の値に対して、実数 α は存在する。すなわち、x はすべての実数値を取る。

（答）直線 $y=-\dfrac{1}{4}$

《別解１の別法》(途中まで)
放物線 $y=x^2$ … ⑧ 上の点 A(α,α^2) を通る傾き m の直線の方程式は
$y-\alpha^2=m(x-\alpha)$　　$y=mx-m\alpha+\alpha^2$ … ⑨
⑧と⑨より、$x^2=mx-m\alpha+\alpha^2$　　$x^2-mx+m\alpha-\alpha^2=0$
⑧と⑨が接するので、判別式 $D=m^2-4(m\alpha-\alpha^2)=0$　　$(m-2\alpha)^2=0$
$\therefore$ $m=2\alpha$　放物線 $y=x^2$ 上の点 A(α,α^2) における接線の方程式は、$y=2\alpha x-\alpha^2$

《解説》
《解答》では、点 P を通る傾き m の直線①が放物線②に接するのは、①, ②の連立方程式から y を消去して得られる x の２次方程式の判別式 $D_1=0$ で立式した。(表現した)
２本の接線が直交するのは、m の２次方程式 $D_1=0$ が、異なる２つの実数解 m_1, m_2 をもち、$m_1m_2=-1$ となることで立式した。(表現した)
また、放物線②に２本の接線が引ける点 P の領域は、図より明らかに不等式 $y<x^2$ の表す領域であり、⑤と一致している。
《別解１》では、点 A, B における接線を先に考え、これらの２本の接線が直交する条件の下で、これらの２本の接線の交点 P の軌跡を求めた。
また、(答)の直線 $y=-\dfrac{1}{4}$ は、放物線 $y=x^2$ の準線と呼ばれる直線である。

（数学Ｃ）

有名問題	円と直線の弦の中点の軌跡	参考：チャート式 数学Ⅱ $p.161$ **197** 類題：教科書 数学Ⅱ $p.231$ **5**

直線 $y=mx$ と 円 $(x-2)^2+y^2=3$ が異なる2点P, Qで交わるように、mの値が変化するとき、線分PQの中点Rの軌跡を求めよ。

《解答》

$y=mx \cdots$ ① を $(x-2)^2+y^2=3 \cdots$ ② に代入して

$(x-2)^2+(mx)^2=3 \qquad (m^2+1)x^2-4x+1=0 \cdots$ ③ $\quad (m^2+1\neq 0)$

①と②が異なる2点で交わることより、③の判別式 $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(m^2+1)>0$

$m^2<3 \cdots$ ④ $\qquad (-\sqrt{3}<m<\sqrt{3})$

このとき、③の異なる2つの実数解をα,βとすると

解と係数の関係より、$\alpha+\beta=\dfrac{4}{m^2+1}$, $\left(\alpha\beta=\dfrac{1}{m^2+1}\right)$

また、α,βは、異なる2点P, Qのx座標であるので、R(x, y)とおくと

$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{2}{m^2+1}>0 \cdots$ ⑤　かつ　$y=mx$

$m=\dfrac{y}{x}$ $(x\neq 0)$ を⑤に代入して、$x=\dfrac{2}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+1} \qquad x^2+y^2-2x=0$

$(x-1)^2+y^2=1$ 　　ただし、④より $0\leqq m^2<3$ であるので、⑤より、$\dfrac{1}{2}<x\leqq 2$

（答）円弧 $(x-1)^2+y^2=1$ $\left(x>\dfrac{1}{2}\right)$

《解答の別法》（途中のみ）

①と②が異なる2点で交わるので、円②の中心C$(2, 0)$から

直線①：$mx-y=0$ までの距離は、円②の半径$\sqrt{3}$より小さい。よって

$\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}<\sqrt{3} \qquad (4m)^2<3(m^2+1) \qquad m^2<3 \cdots$ ④ $(-\sqrt{3}<m<\sqrt{3})$

《別解》［初等幾何］

円②の中心をCとする。（C(2, 0)）

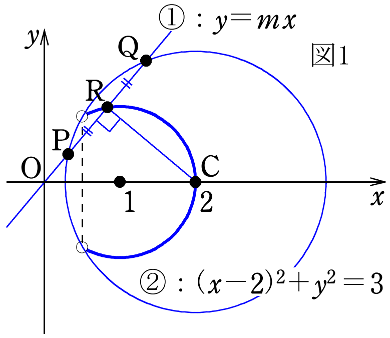
円②の弦PQが、円②の直径となり点Rが点Cに一致する場合を除いては

点Rは、円②の弦PQの中点であるので

円②の弦PQ･直線①は、線分CRと垂直である。

言い換えると、直線①のmの値にかかわらず

$\angle \mathrm{ORC} = 90^\circ$ である。（図1）



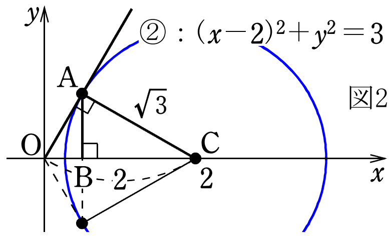
また、直線① : $y=mx$（$m>0$）が円②に接するとき

その接点をA、点Aからx軸に下ろした垂線の足をBとすると（図2）

△AOCは、$\angle \mathrm{A} = 90^\circ$ の直角三角形で

$\mathrm{OA} = \sqrt{\mathrm{CO}^2-\mathrm{CA}^2} = \sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1$

$\triangle \mathrm{AOC} \backsim \triangle \mathrm{BOA}$ より、$\mathrm{OB} = \dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}}\mathrm{OA} = \dfrac{1}{2}$



よって、点Rの軌跡は、線分OCを直径とする、

円②の内部の、円弧 $(x-1)^2+y^2=1$ $\left(x>\dfrac{1}{2}\right)$ である。

《解説》

最初の《解答》では、④よりxに条件 $\dfrac{1}{2}<x\leqq 2$ が付くことに注意しよう。

点Rの軌跡は円②の内部にあることを考えれば、軌跡に何らかの条件が付くことが分かる。（図1参照）

また、異なる2つの点P, Qの座標が、$(\alpha, m\alpha)$, $(\beta, m\beta)$ であるので、線分PQの

中点R(x, y)は、$x = \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{2}{m^2+1}$, $y = \dfrac{m\alpha+m\beta}{2} = m\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{2m}{m^2+1}$

これらの2つの式からmを消去して、x, yの方程式を導くにしても、結局、mの1次

式 $y=mx$ をこれらの2つの式から作り、$m=\dfrac{y}{x}$（$x\neq 0$）でmを消去することになる。

点Rが直線①上にあることから、$y=mx$ とmの1次式を作る方が早い。

《別解》のように初等幾何を利用すると、最初の《解答》のような計算なしで、点Rの軌跡が求まる。（すばらしい!!）