数学　Ⅲ型　講評と解説

大問$\boxed{1}$(小問集合)　　　　　目標解答時間：15分　(Ⅰ→7分10秒)

すべて完答が望ましい。

⑴　基本的な「部分分数分解」の問題。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

と変形する。ミスのポイントは係数の「$\dfrac{1}{3}$」があるかどうか。変形後は、初項と末項しか残らないので、すべて書き並べなくても、「$\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)$」と直ぐに書けるようにしておくのが良い。

⑵　これも整数問題の基礎。

「(整数)×(整数)=(整数)」の形に持っていくことが目標となる。今回、「$(x+1)(y-2)=4$」と変形した後、x, y のプラスマイナス関係なく求めてから　条件「正の整数」　に適する (x, y) を求めても良い。

⑶　対数不等式。変形を上手くできるかがポイントでした。

対数方程式・不等式を解くには、まず最初に「真数条件」を確認する。どの問題でも必須です。$\log x$ の関数を考える時にも「定義域」として現れるので、確認を怠らないようにしよう。その次に、必ず「底を1より大きいものに揃える」を行う。今回は、底2がベストなので、

$$2\log_2 x+1\geqq 2\log_4(10-x)\quad\Longleftrightarrow\quad \log_2 x^2+\log_2 2\geqq 2\cdot\frac{\log_2(10-x)}{\log_2 4}$$

と変形できるようにしておきたい。特に、定数の変形($\log_2 2$)を覚えておこう。また、出てくる項の係数は全てプラスにしておくと、「対数の和は真数の積」が行えるので、方程式・不等式を解くことができます。

⑷　点と直線の距離の問題。

円が出てきているが、使用されているのは、中心 $(0, 0)$ と半径 $\sqrt{10}$ だけ。そこまで恐れなくても良い。

この問題の鍵は、「直線 l が定点 $(0, 3)$ を持つ」ところに気付けるかです。これによって、図がイメージしやすくなり、問題(ii)がイメージしやすくなります。それによって、弦の両端と円の中心でつくられる三角形が二等辺三角形であることが見えたら、後は問題(i)の距離 d を使って、三平方の定理でお仕舞です。

定数を含む直線の問題に出会ったら、「定点」があるかどうかを必ず確認するようにしよう。

⑸　微分と積分が融合した基本的な問題。

接線を求める → 図形的な位置関係を把握する → 積分区間を求める → 積分する

の流れが、問題文を見た瞬間に頭に思い浮かぶように学習しましょう。

接線は「傾き」と「接点」が命。接点が分からない問題は、最優先に接点を求めましょう。

大問$\boxed{2}$(記述【三角関数】)　　　　目標解答時間：20分　(Ⅰ→13分50秒)

⑵までは絶対に解きたい。⑶は部分点を少しでももらうために記述をする感じです。

⑴　「$a=1$」なので、ただの三角方程式。コサインの2倍角の公式で全てコサインに変形したら、後は因数分解でけりが着きます。

⑵　これもただの三角不等式。一番簡単な「三角の合成」です。合成角 α も「$-\dfrac{\pi}{4}$」と分かるので、非常に解きやすい。しかし、この問題は⑶につながるので、絶対間違えてはならない。

(3)　これが解けたら優秀、よく勉強できています。構造の把握がまず大変。そして、落とし穴がいくつもあります。

以下、ざっと解説をしますが、Ｉは模範解答と少し違うやり方でやったので、参考までに。

まず、①の方程式を(1)と同様に全て $\cos\theta$ の式に変形すると

$$16\cos^2\theta-8a\cos\theta+a^2-1=0$$

そこから、「$\cos\theta=t$」とおく。もちろん t の範囲は「$-1\leqq t<1$」。とすると、この方程式は

$$16t^2-8at+a^2-1=0 \quad \cdots（*）$$

となる。さて、この２次方程式（＊）を解くことになるのだが、まずは目標を明確にしておかないといけない。

問題は、「θ の異なる解が丁度３個」と言っている。今、(2)から θ の範囲は「$0<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$」となっているので、方程式（＊）を解いたとき、t と θ の関係性を考えると、

$t=-1$ のとき、θ は１個　　$-1<t<0$ のとき、θ は２個　　$0\leqq t<1$ のとき、θ は１個

解が出てくる事になる。なので、θ が丁度３個になるには、２パターン

(ア)「$t=-1$ と、もう一つの解が $-1<t<0$ の範囲にある」

(イ)「１つの解が $-1<t<0$ の範囲にあって、もう一つの解が $0\leqq t<1$ の範囲にある」

を考えなければならない。

さて、目標が整理できたので、解こうと思う。

t の２次方程式（＊）の解を考えるときは、グラフで捉えると良いので左辺を $f(t)$ とおいて、t 軸との共有点を考えた。

$$f(t)=16\left(t-\frac{a}{4}\right)^2-1$$

と変形すると、下に凸で、頂点が $\left(\dfrac{a}{4},\ -1\right)$ なので、必ず t 軸と交わることが分かる。あとは、条件(ア),(イ)をグラフとの共有点に置き換えると、

$$(ア)\Longrightarrow\quad f(-1)=0\quad かつ\quad \frac{a}{4}>-1\quad かつ\quad f(0)>0$$

$$(イ)\Longrightarrow\quad \begin{cases} f(-1)>0\quad かつ\quad f(0)<0\quad かつ\quad f(1)>0 \\ \dfrac{a}{4}<0\quad かつ\quad f(0)=0 \end{cases}$$

の条件となる。ここで(イ)を２つに分けたのは、グラフが点 $(0,0)$ を通過する場合で状況が少しややこしくなるからである。あとは、これら連立不等式を解けば終了である。　□

三角の問題は、このような実数解がらみがよく出題される。グラフとの位置関係や置き換えたときの構造をゆっくりと把握する必要性があるので、繰り返し練習しておこう。

大問 $\boxed{3}$(確率)　　　目標解答時間：20分　(Ｉ→15分00秒[推定])

これも(2)までは確実に解きたい。構造を把握できれば(3)も解けて欲しい。

３つのさいころを用いる問題。全事象が 6^3 通りと多いように思うが、３つのさいころの目の組 (a,b,c) で考えればさほど難しくはない。今回のポイントは「全て書き並べられたか」。書き下し法を用いた解答が一番スムーズなので、理論で解こうとした人は手が止まったのではないかと思う。理論ばかりではなく、受験は泥臭い方法でも解けるようにしておきましょう。

(1)　出る目の組が $(1,1,3)$，$(1,2,2)$ の並び替えだけある。

⑵　いずれか2つが$(1,4)$のとき、

$$\begin{cases}(1,4,1),\ (1,4,4)\\(1,4,2),\ (1,4,3),\ (1,4,5),\ (1,4,6)\end{cases}$$ の6パターン。あとは並び替えを考える。

いずれか2つが$(1,3)$のとき、

$$\begin{cases}(1,3,1),\ (1,3,3)\\(1,3,2),\ (1,3,4),\ (1,3,5),\ (1,3,6)\end{cases}$$ の6パターン。こちらも後は並び替え。

⑶　数えやすさを考えると、余事象で考える方が良い。⑵と同様に和が10のときを考える。パターンは$(4,6)$と$(5,5)$がある。同様に書き下しをすると、$(4,6)$の中と、問題⑵の中に、かぶり「$(1,4,6)$」があるので、それを考えないと、和が5の時と10の時が互いに排反にならない。あとは数え上げて、全体から引けば答えが出る。

大問$\boxed{4}$(図形【平面ベクトル】)　　　目標解答時間：25分　(I→18分39秒)

よく見る問題。⑶の小題(i)までは解いてほしい。勝負は小題(ii)でした。実感は、最後に凄く重たい問題がきたなぁと思いました。前提が軽すぎてあっけにとられた感じです。

ベクトルはまず初めに「ベクトルのスタート地点(Iは、世界の中心、と呼んでいます)を決める」。そして、スタート地点から発射される2本のベクトルを設定する。これが出来なければ何も解けません。

今回、問題の設定で、　スタート→O,　2本のベクトル→$\vec{a}$と$\vec{c}$　と決められているので、やりやすかったのではと思います。

⑴　$\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}$　を始点Oに変形できるかです。これは誰もが解けて欲しい。

⑵　点Pの位置を2つの視点から見ることが出来るかがポイント。

一つ目の視点：点Pが直線OB上にある。　$\Longrightarrow$　$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OB}$ なる実数kが存在する。

二つ目の視点：点Pが直線CD上にある。　$\Longrightarrow$　$\mathrm{CP}:\mathrm{PD}=t:(1-t)$　$(0<t<1)$ とすると、

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OD}+(1-t)\overrightarrow{OC}$ と表せる。

あとは、$\vec{a}$と$\vec{c}$の一次独立を使えば出せますし、同時にCP : PDもでます。

⑶

(i)　$\mathrm{OA}=3$, $\mathrm{OB}=\sqrt{15}$, $\mathrm{OC}=4$　を　$|\vec{a}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{15}$, $|\vec{c}|=4$　と読み替えられたかが鍵です。これに気付けば、⑴で求めた式が適応できると気付きます。内積を出すときは、たいてい「大きさを2乗」しますので、この方法を頭に叩き込んでおきましょう。

(ii)　いきなり、「折り曲げて…」ときました。びっくりです。なにがどうなってるんやらと思いましたが、ピンとひらめきます。「CをDに重なるように…」あ！⑵で、「CP : PD ＝ 1 : 1」だったじゃないか！…ってことは、折り目上に点Pあるんじゃね？

これが閃いたら、勝ったも同然です。なぜなら、直線NPと直線CDは垂直に交わっているはずだからです。

点Nは直線OC上にあるので、$\overrightarrow{ON}=p\vec{c}$ (pは実数)と表せる。NP⊥CDだから、$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

あとは、始点を全てOに揃えたら、変数pの方程式を解くだけになります。

これで終わったと思ったら、まだ面積を求めさせる。いやらしい。

上で求めたpは正の値であるので、点Nは「線分OC」上にある。この「線分」がとても重要。点Nが線分OCの外分点だったらさらにややこしくなるので、内分点の確認は必須。

これで、囲まれた部分が△OPNであると分かるので、△OACとの面積比を比べれば出せます。△OACの面積は、片々の大きさとその内積を公式「$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{c})^2}$」に代入すれば出せます。公式覚えておこう。

大問5(無限級数)　　　　目標解答時間：20分　(I→14分16秒)

(1)は出来ないと恥ずかしい。(2)と(3)は少し抵抗があるように見えるが、(3)の方は実に優しかった。数Ⅲと聞いてどのような問題だろうと思っていたが、基礎を聞かれていたので、良い問題だと思います。

(1)　「無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束し、その和が1」と聞くと手続きは、

$$\{a_n\}\text{の一般項}\,a_n\,\text{を求める} \quad \rightarrow \quad \text{部分和}\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

である。今回、$a_n = 2p^{n+1}$ なので、非常に求めやすかった。手が止まる所が無い感じ。

(2)　まず円錐の体積 V_n の求め方を確認しよう。図より

$$V_n = (\text{底面積}) \times a_n \times \frac{1}{3}$$

底面積は円の半径が必要。円の半径は、三平方の定理より　$\sqrt{1-a_n{}^2}$　なので

$$V_n = \frac{\pi}{3} a_n (1-a_n{}^2)$$

となる。(1)から、$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ となるので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^n \right\}$$

とわかる。あとは、大切な無限級数の理論、【教科書数Ⅲ P.123】

「$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が共に収束する　$\Longrightarrow$　$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ は収束して、その和は $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$」

を使います。今回、簡単に答えが出せたと思いますが、記述としては、必ず

「$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^n$ は共に収束するので、$\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ も収束して…」

を書かなければ減点となるでしょう。

(3)　展開図を考えると、側面は扇形になって、その中心角は弧度法の定義から、弧の長さになる。そして、弧の長さは、底面の円の円周の長さと一致するので、中心角の大きさは　$2\pi\sqrt{1-a_n{}^2}$　となる。これから

$$T_n = \pi\sqrt{1-a_n{}^2}$$

とわかる。ここで、また、無限級数の理論【教科書数Ⅲ P.124】

「$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する　$\Longrightarrow$　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$」　の対偶　「$\lim_{n\to\infty} a_n \fallingdotseq 0$　$\Longrightarrow$　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する」

をつかう。

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \pi$$

であるので、$\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ は発散する。

【総評】

全体的に手が付けられる問題が多かった。悩ましいのは2問程度。それ以外は、教科書の定義や性質を忠実に理解しておけば解けるでしょう。解けなかった問題、間違えた問題は復習を考えるいいきっかけになります。数Ⅲはもっと難しくなっていきますので、数学Ⅰ・Ⅱ・A・Bを丁寧に理解しておきましょう。