フィボナッチ数列の概論とこれからの展望

Ⅰ、フィボナッチ数列とは

フィボナッチ数列とは、レオナルド・フィボナッチが考案した、隣り合う２つの項を足すと、次の項になる数列である。1202 年にフィボナッチが発行した「算盤の書」に記載されたが、古くはインドの数学所にも記載されていた。

・最初の１を飛ばして、前の数字を後ろの数字で割ると次第に 0,618 に収束する。

・最初の１を飛ばして、後ろの数字を前の数字で割ると、次第に 1,618 に収束する。

・最初の１を飛ばして、２つ後ろの数字で割ると、次第に 0,382 に収束する。

・0,618、1,618、0,382 は黄金比と呼ばれ、ピラミッドやパルテノン神殿、ミロのヴィーナスなどに関連している。

$a_1=1 \quad a_2=1$ で書き並べると

１、１、２、３、５、８、13、21、34　…

と表される。

フィボナッチ数は自然界に多く出現する。

・花びらの数はフィボナッチ数であることが多い

・植物の葉のつき方は、フィボナッチ数と関連している

・ミツバチの家系をたどっていくとフィボナッチ数列が現れる

・n 段の階段を１段または２段ずつ登るときに、登る場合の数は F_{n+1} 通りある

Ⅱ、一般項

漸化式は、

$$a_1=1 \quad a_2=1 \qquad a_{n+2}= \quad a_{n+1}+a_n$$

と表される。

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ の特性方程式は

$$x^2-x-1=0 \quad \therefore x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}、\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

よって、漸化式は、

$$a_{n+2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\right)$$

…①

$$a_{n+2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right)$$

…②

①より、$\left\{a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\right\}$ は初項 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 公比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の等比数列なので

$$a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad …③$$

②も同様にして

$$a_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n …④$$

④－③より、一般項 a_n は

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$ で表される。

Ⅲ、これからの展望

フィボナッチ数列は自然界で多く見られるといわれるが、それらがどのようにフィボナッチ数列とかかわっているのか調べていきたい。また、フィボナッチ数列と大きくかかわっている黄金分割費についても詳しく調べていきたい。