Extension of Dimension
次元の拡張

大阪府立生野高等学校
２年SSH数学探求グループ

Definition of dimension
次元の定義

Ｉ, Euclid's･･･

Concept signifying breadth of space or diagram

Dots don't include a part
Lines are length which don't include width
Surfaces include only length and width
Solids include length, width and height

ユークリッドの定義･･･

空間や図形の広がりぐあいをあらわす概念

点は部分を持たないものである。線は幅を持たない長さである

面は長さと幅を含むものである。立体は長さと幅と高さを含むものである

Ⅱ, Descartes'･･･
The number of numerical values to locate a point

Dots mean zero dimension
Lines mean one dimension
Surfaces mean two dimensions
Solids mean three dimensions

デカルトの定義・・・

１点の位置を決めるために必要な数値の個数

点は０次元である。線は１次元である。

面は２次元である。立体は３次元である。

Is the space we live in three dimensions?
私たちの暮らす空間は３次元？

- From a fixed point , a position could be pinpointed by the three numerical values of the directions, height, width and depth.
- Therefore, it is three dimensions that the space we live in.

私たちの暮らす空間は３次元？
基準となる点から縦、横、奥行きの方向の三つの数値で
位置を決めることができる。
こうしたことから、私たちの暮らす空間は３次元であるといえる。

Does the space of four dimensions exist ?
四次元空間は存在するのか？

- We challenged revealing the existence more than four dimensions by using diagram.
- First of all, to explain on more than four dimensions, we'll give a lecture on triangle number, hex number, gnomon, tetrahedron number and rhombic dodecahedral number in the space of three dimensions.

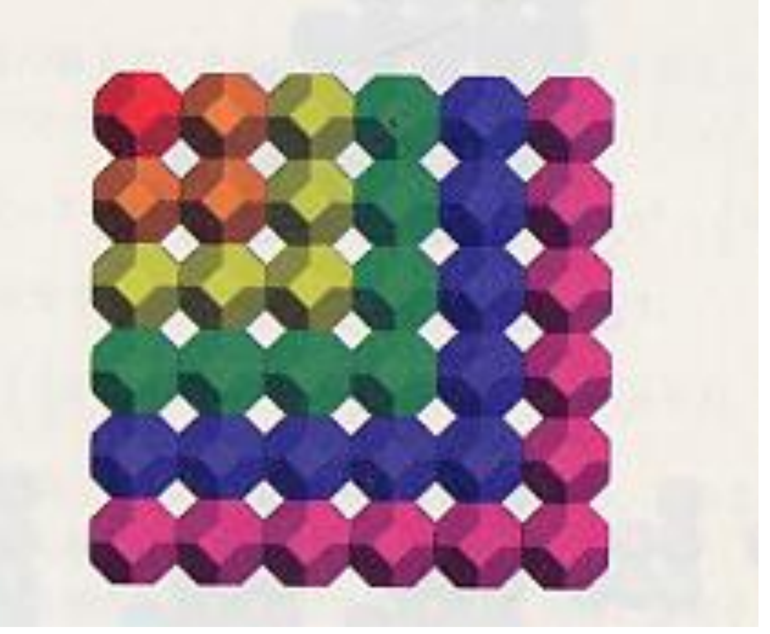
私たちは４次元以上の存在を図形を使って明かすことを試みた。
まず、４次元以上を説明するために、３次元空間のヘックス数、グノモン、四面体数、菱形十二面体数について講義する。

Gnomon

グノモン

- Primitive Greeks think of parts used to create a bigger diagram than an original one as a **gnomon**.

古代ギリシャ人は、ある図形を同じ形のまま、さらに大きくするのに用いた図形の部品を「**グノモン**」と呼んだ。



Triangle number
三角数

- As the figure 2.13,
  the total number of increasing one after one horizontally to make equilateral triangular form is called a triangle number.

図2.13のように
横に並ぶ個数を増やして
得られる数を三角数と呼ぶ

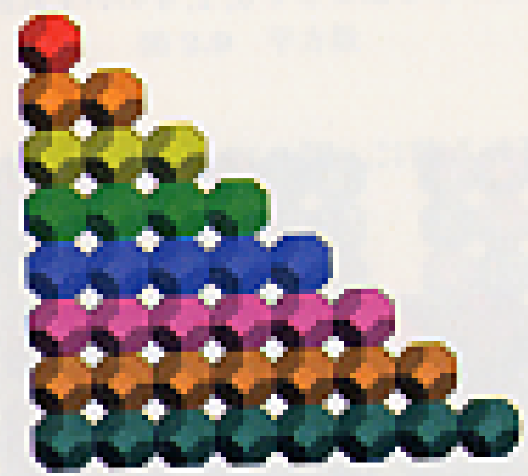
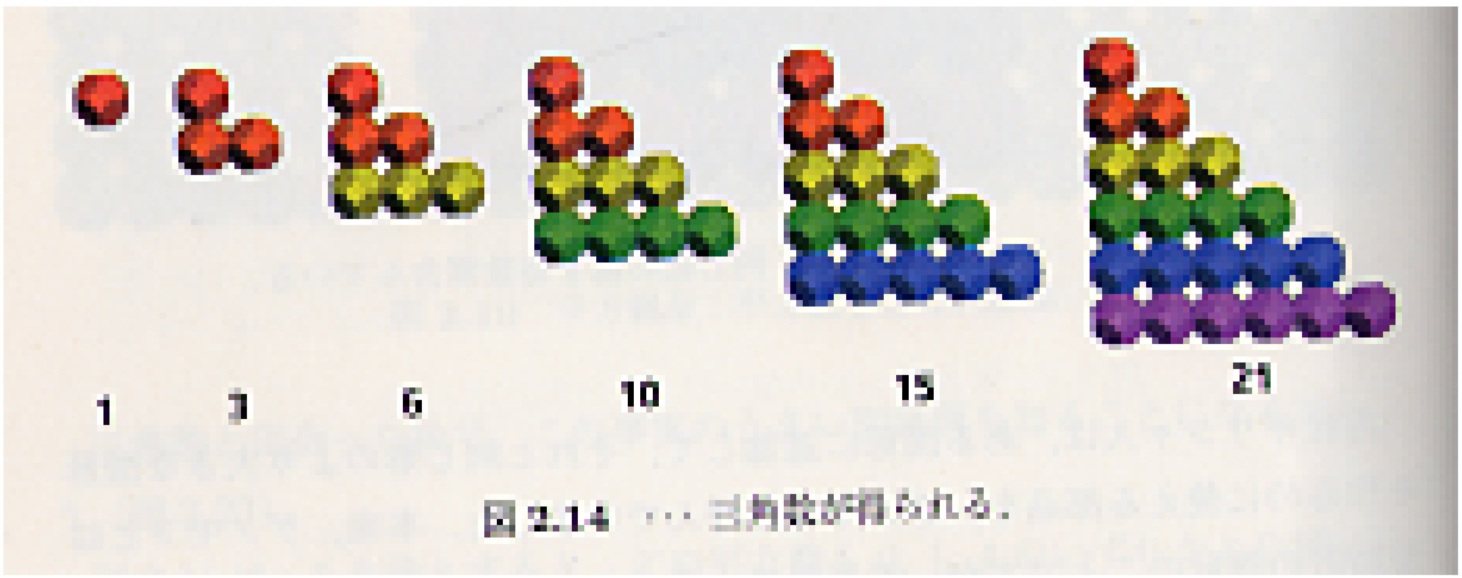


図 2.13　横の列を長くしていくと・・・

Triangle number
三角数

The n-th triangle number is represented by ⊿n

〔n番目の三角数を⊿nで表す〕



$\triangle_1 = 1 \quad \triangle_2 = 3 \quad \triangle_3 = 6 \quad \triangle_4 = 10 \quad \triangle_5 = 15 \quad \triangle_6 = 21$

Hex number
ヘックス数

- As the figure 2.26, the number of the shape is called a **hex number**.

The n-th hex number is as follows.

$$hex_n = 1 + 6\triangle_{n-1} = 1 - 3n + 3n^2$$

図2,26のようなものを
ヘックス数と呼ぶ。
n番目のヘックス数は
次のようになる

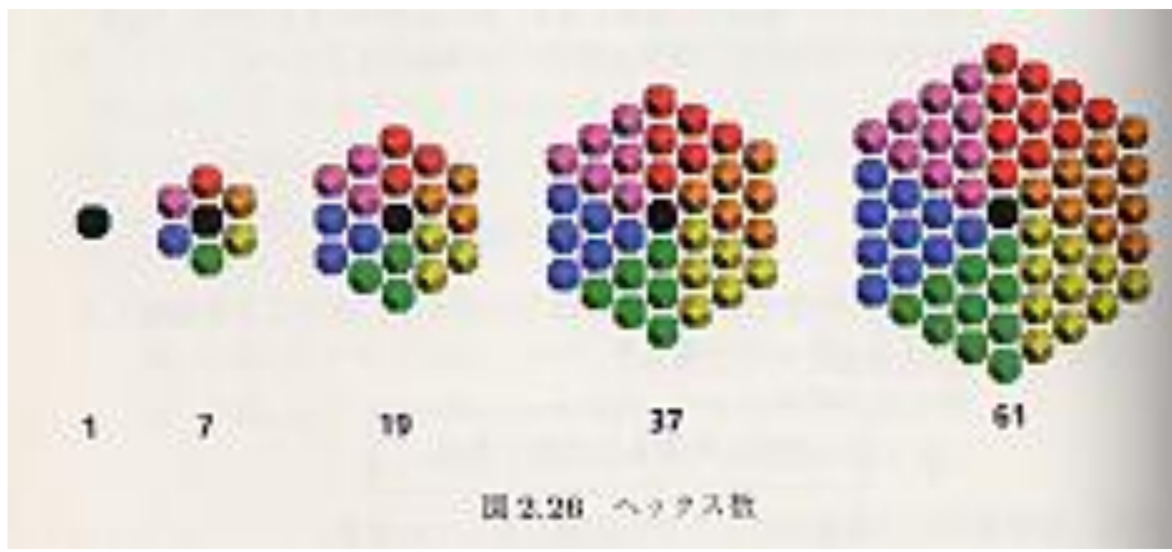


図 2.26 ヘックス数

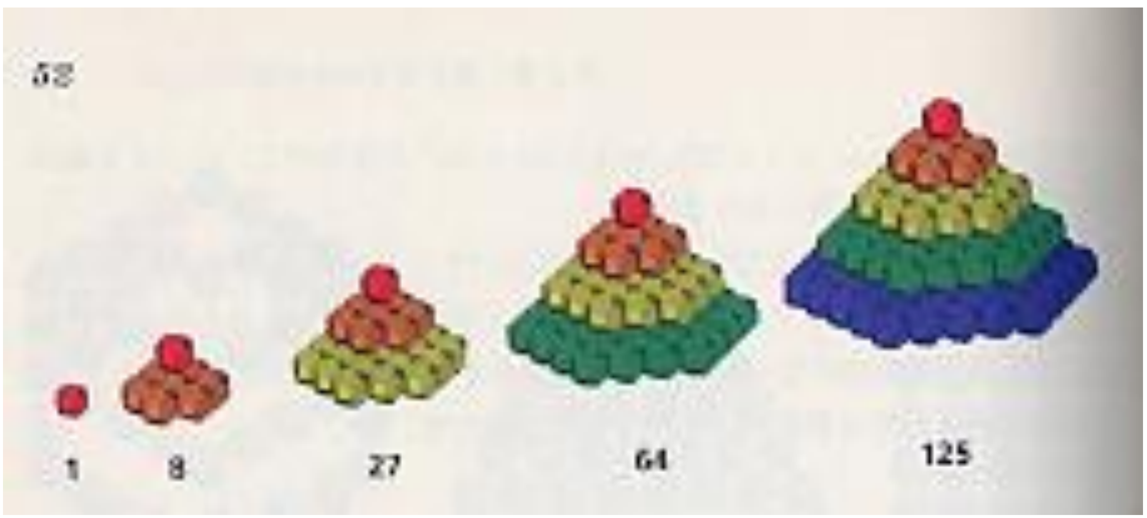
Three dimensions

3次元

- Pile up the hex, piling up the hex makes the Pyramid･Hex.

As you can see, it is <u>a cubic number</u>.

1 , 8 , 27 , 64 , 125 , ･･･



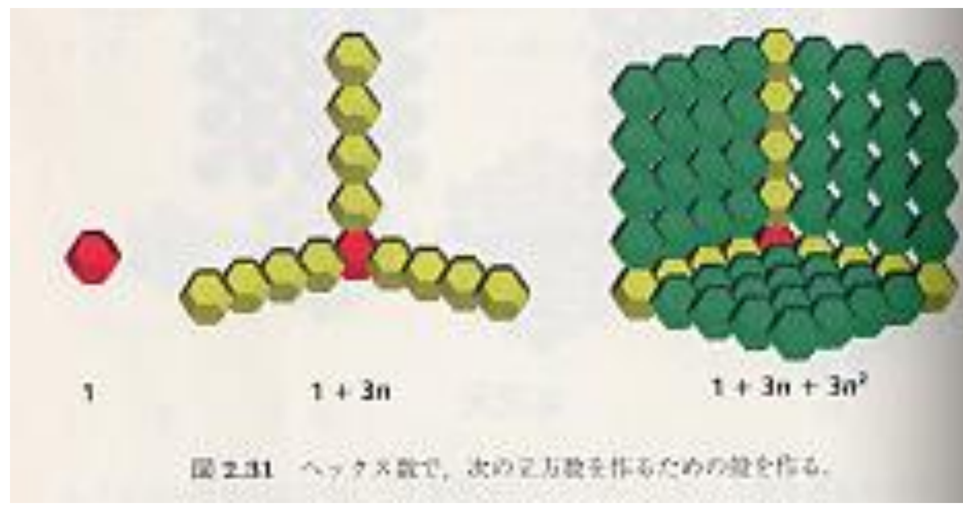
ヘックス数を積み上げると、ヘックス・ピラミッドができる。
見ての通り、それは立方数になる。

Why does the Pyramid・Hex become a cubic number?

どうしてヘックス・ピラミッドは立方数になるのか？

From the figure 2.31, the hexagon used to make a hex number is the projection of the cube .
In addition, by piling up the numbers corresponding to two-dimensional number, you can create three-dimensional numbers.

図2.31より、ヘックス数を作るために使った六角形は立方体の射影である。
他にも２次元的な配置に対応する数を積み上げて、３次元的な数を作ることができる。



- Make “shell” to create the next cube by using the hex number.

Tetrahedron number
四面体数

- For instance,

  Stacking triangular number, you can make a triangular pyramid. That is called a tetrahedron number.

The n-th tetrahedron number is as follows.

$$Tet_n = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

例えば、三角数を積み上げると、三角錐ができる。それが四面体数である。
n番目の四面体数は次の通りである。

Rhombic dodecahedral number

菱形十二面体数

- What is three dimensional version of the hex number with the center? It is the figure 2.45.

 This is called a **rhombic dodecahedral** number.

 The n-th rhombic dodecahedral number is as follows.

$$Rho_n = (2n-1)(2n^2-2n+1)$$

中心つきヘックス数の３次元版は何だろうか？図2.45がそうである。これは菱形十二面体数と呼ばれる。n番目の菱形十二面体数は次の通りである。

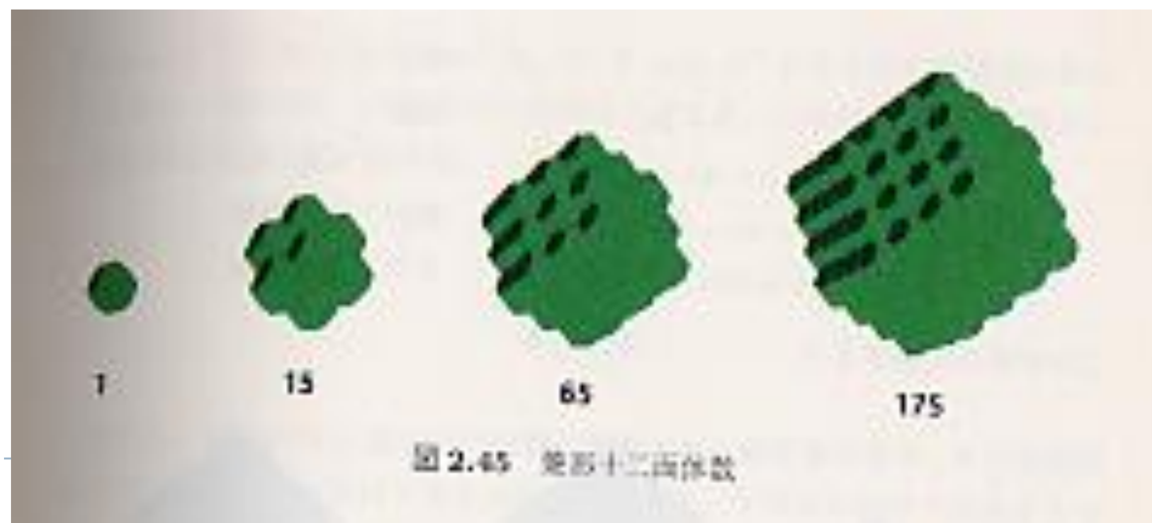


図2.45 菱形十二面体数

Bend the chain number

連鎖数を曲げる

When the one-dimensional chain number (odd) is bent , the gnomon is made. And by arranging it, the square is made. The hex number being bent as well, “shell” is created, and by stacking it, cube is made. Similarly, in the space of four-dimension , the rhombic dodecahedral number being bent, the shell is made, and by stacking it, ***Tesseract*** can be made.

１次元の連鎖数(奇数)を曲げてグノモンを作り、それを並べて正方形は作られる。ヘックス数を曲げて「殻」を作り、それを重ねて立方体は作られる。それと同様に、４次元空間の中で、菱形十二面体数を曲げて殻を作り、それを重ねて**４次元立方体**を作ることができる。

Four dimensions
４次元

When we pile up the tetrahedral number,

Five ER number is created ;

Five ER is the simplest figure in the four dimensions, equivalent to the regular polyhedron.

The n-th Five ER number is as follows.

$$Ptop_n = \frac{1}{4} Tet_n \times (n+3) = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

四面体数の初めの何個かを積み上げていけば、**五胞体数**になる。（五胞体とは、正多面体に相当する４次元空間内の図形で、最も簡単なものである）

Extend dimensions further and further
もっともっと次元を拡張する

- Stacking one dimension, we can get two dimensions. Stacking two dimensions, we can get three dimensions. So we can get four dimensions when we stack three dimensions!
- Although we can’t see or imagine the space more than four dimensions directly, it is said mathematics suggests that there exist dimensions infinitely.

１次元を積み重ねると、２次元が得られる。２次元を積み重ねると、３次元が得られる。そして、私たちは３次元を積み重ねるとき、４次元が得られるのだ！
私たちは４次元以上の空間を直接見たり、想像することはできないけれど、数学は次元が無限に存在すること示唆していると言える。

Reference
参考文献

“THE BOOK OF NUMBER”

John Horton Conway ＆ Richard K. Guy

Translator ; Seiya Negami

“Newton ~ What is the dimension ~ ”

Collaborator ; Lisa Randall ＆ Keiichi Maeda

Thank you for listening