

$\sqrt{2}$ の近似値を三平方の定理によって求める

大阪府立岸和田高等学校

大橋 直紀

要旨

$\sqrt{2}$ の近似値を求める方法は何種類か有名なものがあるが、今回は三平方の定理を用いて直角二等辺三角形に近い、原始ピタゴラス数でできた直角三角形を法則や条件を見つけて探し出し、直角二等辺三角形の辺の比が $1 : 1 : \sqrt{2}$ であることを利用して、見つけた直角三角形の斜辺の長さを他の 1 辺の長さで割ることによって $\sqrt{2}$ の近似値を求めた。

序論

$\sqrt{2}$ の近似値を求める方法で有名なものをいくつか挙げておく。

- ① $\sqrt{2}$ を 2 乗すると 2 になるという性質を利用する。 $1^2=1$, $2^2=4$ なので $\sqrt{2}$ は 1 と 2 の間にある。 $1.4^2=1.96$, $1.5^2=2.25$ なので $\sqrt{2}$ は 1.4 と 1.5 の間にある、という様に求める方法である。
- ② 有理化を利用して計算する。

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}\end{aligned}$$

という様な計算を繰り返して、ある程度のところで $\sqrt{2} + 1 = \frac{5}{2}$ という近似をして分数で表す。

これらの方法は確かに正しい方法であり、 $\sqrt{2}$ の近似値を求められるが、どちらの方法も途中で計算を止める必要があり、計算が複雑にもなってくるのもっと巨大な桁数での近似値を求めるときにはあまり現実的でない。なので高精度で高速に求められる方法を見つけ出そうと思った。そこで考えた方法が三平方の定理を利用する方法である。直角三角形の三辺 a, b, c とすると ($a < b < c$) で、 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立ち、 $a = b$ のとき、 $c^2 = 2a^2$ 、変形して

$\sqrt{2} = \frac{c}{a}$ となるので、 $a \div b$ の整数比の直角三角形を見つければ $\sqrt{2}$ の近似値を分数で表すことができるというものである。

方法

二等辺に近い直角三角形の定義を「斜辺以外の 2 つの辺の長さの差が 1」と定める（もしこの条件を満たす原始ピタゴラス数が無限に現れれば、限りなく二等辺に近い直角三角形は必ずこの条件を満たす。）

この条件を満たす原始ピタゴラス数を探す。そのとき、前提として三辺の長さが互いに素な自然数である直角三角形の辺の長さは $X^2 - Y^2, 2XY, X^2 + Y^2$ (X, Y は自然数で $X > Y$) の形で表せるということが知られている。（これは先行研究で既に正しいことが証明されており、例えば $[3:4:5]$ の直角三角形は $X=2, Y=1$ を代入することで $X^2 - Y^2 = 3, 2XY = 4, X^2 + Y^2 = 5$ と表すことができる。）

この条件を利用して、直角二等辺三角形に近い辺の長さが整数の直角三角形を探す。まず斜辺以外の 2 辺の長さの差が 1 になる必要があるので、 $|X^2 - Y^2 - 2XY| = 1$ となる X, Y を探す。これを X について解くと、

$$X = Y + \sqrt{2Y^2 - 1}, X = Y + \sqrt{2Y^2 + 1}.$$

これらの X と Y が整数となるものを探す。平方

数を4で割ったあまりは0か1になるので

$\sqrt{2Y^2-1}$ が整数になるのはYが奇数のとき、

$\sqrt{2Y^2+1}$ が整数になるのはYが偶数のときで

ある。この条件を満たすXとYの組を表1に示した。ここではY=70まで実際に代入して例してみたが、表を見ると、Y=1を右の式に代入するとX=2が得られ、そのXをYとして左の式に代入するとX=5が得られ、そのXをYとして左の式に代入するとX=5が得られ、X=5をY=5として右の式に代入する、という様な法則でXとYの組が無限に得られるという推測ができる。これを証明していきたい。

証明：Y+ $\sqrt{2Y^2+1}$ が整数であるとき、Yと

$\sqrt{2Y^2+1}$ は共に整数である。このとき、

$Y=t+\sqrt{2t^2+1}$ (tは自然数) として

$X=Y+\sqrt{2Y^2-1}$ に代入すると、

$X=t+2(t+\sqrt{2t^2+1})$ となり、tと $\sqrt{2t^2+1}$ は

条件より整数であるので、 $t+2(t+\sqrt{2t^2+1})$

も整数になる。同様にY+ $\sqrt{2Y^2-1}$ を代入しても整数になるので、先ほど推測した法則は常に成立する。つまり差が1である原始ピタゴラス数は無限に見つかることがわかった。

さらに、表1の右側でX=tが現れたとすると、それを左側のYに代入すると

$Y=t+\sqrt{2t^2+1}$ が得られ、これを右側の式にま

た代入すると、 $X=t+2(t+\sqrt{2t^2+1})$ が得られるので、2つ前に得られたXに1つ前に得られたYの2倍を足せば、次のXが出てくるということである。

次に、表1に登場する数を小さいほうから順に1, 2, 5, 12, 29...という数列として見ると、こ

の数列を a_n として、 $a_1=1, a_2=2$ 、先ほどの証明より、 $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$ という漸化式ができ、これの一般項を求めると、

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

さらに、Y=1, 2, 5...で、X=2, 5, 12...なので、Xのn項目はYのn+1項目の数として等しくなる。

$$よって、Y = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

$$X = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}} \text{ として}$$

X^2+Y^2 (斜辺の長さ)と $2XY$ (他の一辺の長さ)に代入して、斜辺の長さを他の一辺の長さ

で割ると、 $\sqrt{2}$ の近似値を求めるため式にな

る。実際に代入して整理してみると、

$$\frac{\sqrt{2}\{(1+\sqrt{2})^{2n+1} - (1-\sqrt{2})^{2n+1}\}}{(1+\sqrt{2})^{2n+1} + (1-\sqrt{2})^{2n+1} - 2 \times (-1)^n}$$

となる。

ここで、 $1+\sqrt{2} > 1$ 、 $|1-\sqrt{2}| < 1$ なので、n

を限りなく大きくすると $\sqrt{2}$ に収束する、つま

りnに大きな数を代入することで、 $\sqrt{2}$ により近い数をいくらでも求めることができるということである。

例えば、n=12を代入してみると、分母は927538920、分子は1311738121となり、図2のような直角三角形になり計算の結果を小数で表すと、1.4142135631...となり、「一夜一夜に一見頃」(1.14212356)という $\sqrt{2}$ を途中まで表した語呂合わせであるが、これと求めた小数は、小数第8位までは少なくとも完全に一致している。

nを代入して得られた分数を小数に直したとき、何桁目まで実際の $\sqrt{2}$ の値と等しくなるかというのを表3に示した。表からわかるよう

に、5 項目で 4 桁目まで等しく、12 項目にもなると 10 桁目まで等しくなるので、この方法は最初に挙げた 2 つの方法と比べ、計算が比較的楽に、そして正確である方法だといえる。

結論

今回導いた方法の利点と欠点をまとめる。

序論での方法①と比べると、利点としては、計算が①の方法ほど複雑にならず、そして早いことである。また、欠点としては、今回の方法では、最後の割り算による小数の何桁目までが正しいかわからないという欠点がある。

次に②の方法と比べると、利点としては、 n 番目から $n+1$ 番目にするとき、今回の方法では、前の項を使って簡単に求まるが、②の方法では、初めからやり直す必要があるので、桁数が大きくなるほど、今回の方法が便利になるということである。

成果としては、今回の研究で、 $\sqrt{2}$ の近似値を求めるためのより素早い方法がわかったことであった。

参考文献

- ・ルート 2 を求めるー浜田塾
<hamadajuku.com/column/math/sqrt.aspx>
- ・ピタゴラス数の求め方とその証明 高校数学の美しい物語 <mathtrain.jp/pythagoras>

表1 X、Yが整数になる組の例			
$X = Y + \sqrt{2Y^2 + 1}$		$X = Y + \sqrt{2Y^2 - 1}$	
$Y = 2$	$X = 5$	$Y = 1$	$X = 2$
$Y = 12$	$X = 29$	$Y = 5$	$X = 12$
$Y = 70$	$X = 169$	$Y = 29$	$X = 70$

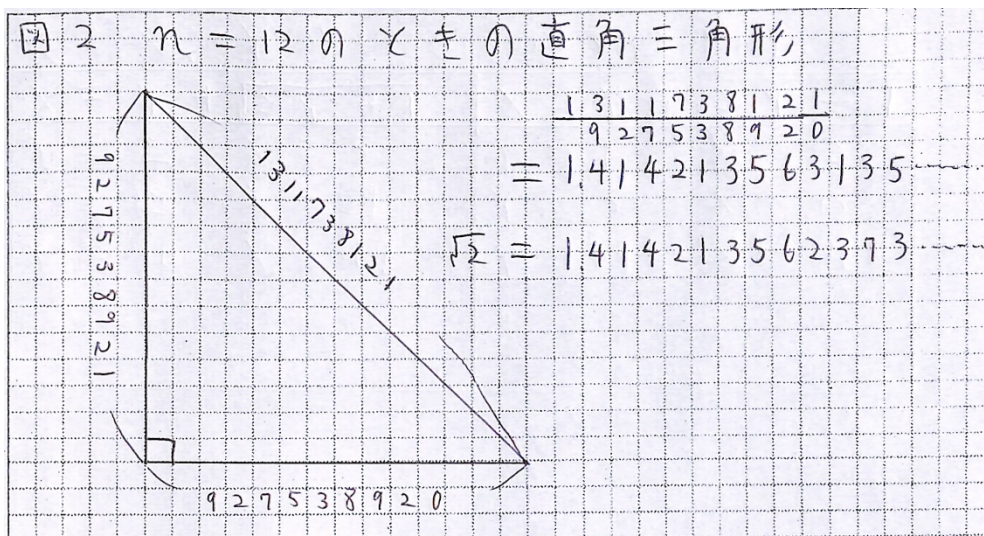


表3 n の値と $\sqrt{2}$ への近似性の関係		
n	代入結果	誤差(有効数字2桁)
1	1.25000	-0.16
2	1.45000	+0.036
3	1.408333	-0.0058
4	1.4152298	+0.0010
5	1.4140394	-0.00017
6	1.41424344	+0.000029
7	1.414208434	-0.0000051
8	1.414214442	+0.00000088
9	1.414213411	-0.00000035
10	1.414213588	+0.000000026
11	1.4142135579	-0.000000044
12	1.4142135631	+0.0000000084