数学 B2 班　　今井　亨　　定道　勇斗
谷口　昂平　西川　太朗

二次元での定理を三次元に拡張

1.　はじめに

直角三角形で成り立つ三平方の定理（ピタゴラスの定理）というのはかなり有名です。私たちはこの定理を三次元（立体）に拡張したときにどうなるのかというのに興味を持ちました。そして、研究したところ三次元でも同じような定理が成り立つことがわかりました。だからほかにも三次元に拡張して成り立つ定理がないかを調べようとしました。

2.　研究方法

まず、ある図形の平面での性質を調べ、その図形を立体に拡張したときの性質との関係を調べました。今回は三平方の定理、パスカルの三角形を調べました。

3.　三平方の定理

(1)　仮定

３つの直角三角形 $S_1S_2S_3$ の直角の点を一つの頂点とした四面体を考える。
残りの斜面を S_4 とすると、S_1, S_2, S_3 の面積の平方の和は S_4 の面積の平方に等しい。($S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2 = S_4{}^2$)

(2)　証明

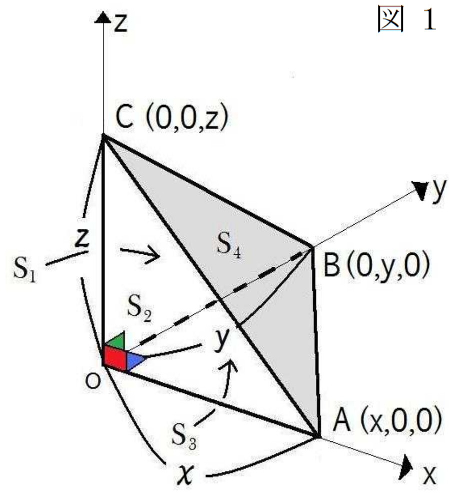
図１のように=(x, 0, 0) =(0, y, 0) =(0, 0, z)とする。
このとき=(−x, y, 0) =(−x, 0, z)となる。

$S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2 = (1/4)x^2y^2 + (1/4)y^2z^2 + (1/4)z^2x^2$
$\qquad = (1/4)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$

$S_4{}^2 = (1/2)^2\ \{|\ |^2|\ |^2 - (\ \cdot\ )^2\}$
$\qquad = (1/4)\{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2) - (x^2 + 0 + 0)^2\}$
$\qquad = (1/4)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$

よって、$S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2 = S_4{}^2$

図 1



4.　パスカルの三角形

(1)　パスカルの三角形について

パスカルの三角形とは、まず第１行目の数は１を配置してそれより下の行は右上の

数と左上の数の和を配置して作られた、数字を敷き詰めた三角形である。(図 2)
ここで初めの段を第０段とする。

(2)　パスカルの三角形の性質

1 第ｎ段目の数の配置は $(a+b)^n$ を展開した式を降べき順に並べたときの係数の並びとなる。 Ex) ｎ＝３のとき、$(a+b)^n=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$

2 第ｎ段目の数の合計が 2^n になる。Ex) ｎ＝３のとき、$1+3+3+1=8=2^3$

(3)　仮定

(2)での性質がパスカルの三角形を立体に拡張したときに何らかの形で現れる。

(4)　パスカルの「四面体」の作図

まず、はじめに第０段に「１」を配置する。
次に右図のように数字を配置していく。

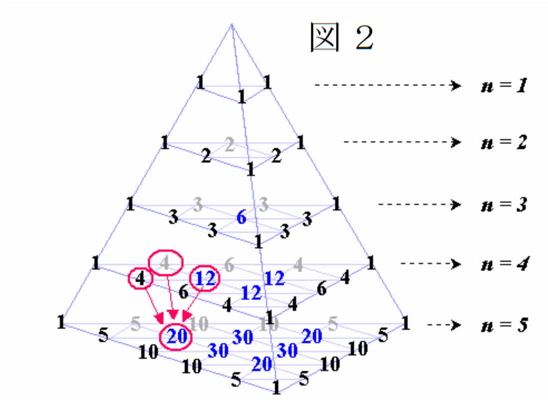


図 2

(5)　パスカルの「四面体」の性質(図 3, 4)

1 第ｎ段目の数の配置は $(a+b+c)^n$ を展開し、降べき順にならべたときの各項の係数と関係ある。

2　第ｎ段目の数の和は 3^n と表すことができる。

図 3

$$(a+b+c)^3= 1a^3 \quad 3a^2b \quad 3a^2c \quad 3ab^2 \quad 6abc \quad 3ac^2 \quad 1b^3 \quad 3b^2c \quad 3bc^2 \quad 1c^3$$

図 4

n=3のとき

$$(a+b+c)^3=1a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+1b^3+3b^2c+3bc^2+1c^3$$

a=b=c=1を代入

$$(1+1+1)^3=1+3+3+3+6+3+1+3+3+1$$

$$3^n=1+3+3+3+6+3+1+3+3+1$$

(6)　結果

①, ②の性質について、パスカルの三角形の性質と似たような性質がパスカルの四面体でも得られました。

5.　まとめ

三平方の定理、パスカルの三角形共に、平面での性質が空間へ拡張したときに姿を変えて現れることが分かりました。

これからは、他の平面での性質でも調べてみたいです。