カプレカー変換

数学Ａ班１
花田慎太郎　前田直人　森川智秋

１．　はじめに

カプレカー変換とは、インドの数学者であり、偉大なる恩師カプレカー先生による発明である。ある２桁以上の自然数について、各桁の数を大きい順に並べたものから小さい順に並べたものを引く操作です。ただし、同じ数が並んでいる(以下ぞろ目という)場合は、最大のならびと最小の並びが等しくなるので､除くことにします。

例えば、{4743}という数をカプレカー変換すると{3996}になります。

$$\begin{array}{rcccc} & 7 & 4 & 4 & 3 \\ -) & 3 & 4 & 4 & 7 \\ \hline & 3 & 9 & 9 & 6 \end{array}$$

７４４３の変換の例

私たちは、様々な数についてこの操作を繰り返し、最後にたどりつく定数(カプレカレカー定数という。)にどのような規則性が現れるかに興味をもちました。

４ 桁の場合、右のように定数は{6174}になります。どの数から始めても同じになります。

桁数や操作により定数に行き着かず、複数の数を繰り返して循環するものがあり、これをループと呼ぶことにします。

4743→7443−3447=3996
3996→9963−3699=6264
6264→6642−2466=4176
4176→7641−1467=6174

６１７４に行き着く例

２．　研究方法

私たちは、一度カプレカー変換をするごとに特定の数を加え、加えた数によってカプレカー定数がどうなるか、規則性はあるのかということを調べました。このことにより、ぞろ目についても考えることができるようになりました。(2 桁の場合、ぞろ目の数をカプレカー変換したあと[+1]をすると{1}となります。これは{01}であると考え、[10−1]の操作を行いました。)

また、桁数を３桁に拡張し、定数がどう異なるのかということを調べました。

２桁の数は[+1]、３桁の数は[+1]から[+20]までの操作をしました。

３．　結果

（１）２桁の数について

[+1]の操作のみ行い、判定法を導き出しました。

〈2 桁[+1]の判定法〉

ある２桁の自然数を{10x+y}(ただし 9≧x≧y≧0)とすると

$(10x+y)-(10y+x)+1=9(x-y)+1$…Ⓐ

このときに得られた値について、再び大きい方が x，小さい方が y となります。

ⅰ)x-y=0 のとき
(Ⓐの式)=9×0+1=1 ⇒ⅱ
ⅱ)x-y=1 のとき
(Ⓐの式)=9×1+1=10 ⇒定数
ⅲ)x-y=2 のとき
(Ⓐの式)=9×2+1=19 ⇒ⅸ
ⅳ)x-y=3 のとき
(Ⓐの式)=9×3+1=28 ⇒ⅶ
ⅴ)x-y=4 のとき
(Ⓐの式)=9×4+1=37 ⇒定数
ⅵ)x-y=5 のとき
(Ⓐの式)=9×5+1=46 ⇒ⅲ
ⅶ)x-y=6 のとき
(Ⓐの式)=9×6+1=55 ⇒ⅰ
ⅷ)x-y=7 のとき
(Ⓐの式)=9×7+1=64 ⇒ⅲ
ⅸ)x-y=8 のとき
(Ⓐの式)=9×8+1=73 ⇒ⅴ
ⅹ)x-y=9 のとき
(Ⓐの式)=9×9+1=82 ⇒ⅶ

以上より
Ⅰ)x-y=0,1,3,6,9 のとき、定数は{10}
Ⅱ)x-y=2,4,5,7,8 のとき、定数は{37}　となります。

（２）３桁の数について
[+1]から[+20]までの操作を行ってデータをとり、どの定数になるか、またはどの数のループになるかを、加える数によって分類しました。
〈3 桁の分類〉
１．１～20 まで加える数を変えて定数、ループを調べた
２．加えた数をｎとする
３．加えた数が 11 以上 20 未満のときは一の位をｎとする
1～ 9 のとき
・100ｎ、100(ｎ－１)＋10 がそれぞれ定数の一つになる
11～19 のとき
・100ｎ＋10、900＋10(ｎ＋１)がそれぞれ定数の一つになる

このほか、
ループがあったり、加える数が奇数か偶数かによってそれぞれの特徴があったり、始める数の大きい方と小さい方の差によって行き着く数を分類したときに一部等差数列の形になったりと、部分的には式などで説明できるところもあったが、すべてに共通した式の発見や説明などには至りませんでした。

４．　今後の課題
今回失敗した 3 桁の操作の証明をすること、2 桁と 3 桁だけでなく他の桁にまで拡張して考えることが今後の課題です。

５．　参考文献ならびに参考 Web ページ
Wikipedia 「カプレカ数」
http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AB%E3%83%97%E3%83%AC%E3%82%AB%E6%95%B0