フィボナッチ数列の拡張

数学 A3 班
許　田邉　堀内　岡野

1. はじめに

数列の中でも有名なフィボナッチ数列をあなた達は知っているでしょうか？

フィボナッチ数列とは、Xn+2＝Xn＋Xn+1 となる数列です。

トリボナッチ数列とは上記と同様　Ｘｎ+3＝Ｘｎ＋Ｘｎ+1＋Ｘｎ+2 と求められるものです。

僕たちはフィボナッチ数列の仲間であるトリボナッチ数列について調べようとしました。

2. トリボナッチ数列の漸化式

私たちはフィボナッチ数列の漸化式を求めるのと同様に、特性方程式を用いて求めることにしました。

$$\begin{cases} a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = a_{n+3} \dots ① \\ \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1 \end{cases}$$

①を変形して、$a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} = a_n$…②

ここで特性方程式$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$を用いて進めていきます。

この方程式の３解をα、β、γとおいて②を変形すると

$$\begin{cases} a_{n+3} - (\beta+\gamma)a_{n+2} - \beta\gamma a_{n+1} = \alpha\{a_{n+2} - (\beta+\gamma)a_{n+1} - \beta\gamma a_n\} \\ a_{n+3} - (\gamma+\alpha)a_{n+2} - \gamma\alpha a_{n+1} = \beta\{a_{n+2} - (\gamma+\alpha)a_{n+1} - \gamma\alpha a_n\} \\ a_{n+3} - (\alpha+\beta)a_{n+2} - \alpha\beta a_{n+1} = \gamma\{a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n\} \end{cases}$$

という３式を得られました。この式からa_{n+3}を消去すると

$$\begin{cases} a_{n+2} - (\beta+\gamma)a_{n+1} - \beta\gamma a_n = (\beta-1)(\gamma-1)\alpha^{n-1} \\ a_{n+2} - (\gamma+\alpha)a_{n+1} - \gamma\alpha a_n = (\gamma-1)(\alpha-1)\beta^{n-1} \\ a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n = (\alpha-1)(\beta-1)\gamma^{n-1} \end{cases}$$

という３式となり、さらにこの式からa_{n+2}を消去すると

$$\begin{cases} a_{n+1} - \gamma a_n = \frac{\gamma-1}{\alpha-\beta}\{(\beta-1)\alpha^{n-1} - (\alpha-1)\beta^{n-1}\} \\ a_{n+1} - \alpha a_n = \frac{\alpha-1}{\beta-\gamma}\{(\gamma-1)\beta^{n-1} - (\beta-1)\gamma^{n-1}\} \\ a_{n+1} - \beta a_n = \frac{\beta-1}{\gamma-\alpha}\{(\alpha-1)\gamma^{n-1} - (\gamma-1)\alpha^{n-1}\} \end{cases}$$

の３式が得られました

以上より

$$a_n = -\frac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\{(\beta-\gamma)(\beta-1)(\gamma-1)\alpha^{n-1} + (\gamma-\alpha)(\gamma-1)(\alpha-1)\beta^{n-1}(\alpha-\beta)(\alpha-1)(\beta-1)\gamma^{n-1}\}$$

があり、α、β、γ、を求めれば一般項が得ることができました。

3. 三次方程式の解α、β、γの求め方

ここで、三次方程式の解の公式であるカルダノの公式を用いて 3 解α、β、γを求めたいと思います。カルダノの公式は

$$x=-\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{\frac{\frac{-g+\sqrt{g^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{\frac{-g-\sqrt{g^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}{2}}$$

$$x=-\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{\frac{\frac{-g+\sqrt{g^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}{2}}\omega+\sqrt[3]{\frac{\frac{-g-\sqrt{g^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}{2}}\omega^2$$

$$x=-\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{\frac{\frac{-g+\sqrt{g^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}{2}}\omega^2+\sqrt[3]{\frac{\frac{-g-\sqrt{g^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}{2}}\omega$$

(ただし、$p=-\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}$、$q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}$、$\omega^3=1(\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})$)

という公式です。

これを用いるとα、β、γは

$$\alpha=\left\{\frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right)\right\}$$

$$\beta=\left\{\frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}\omega+\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\omega^2\right)\right\}$$

$$\gamma=\left\{\frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}\omega^2+\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\omega\right)\right\}$$

となります。

これを先ほど求めた一般項に代入しました。その結果、

$$a_n=-9\left\{\frac{1}{p^2+q^2-4p-4q-15}\alpha^{n-1}+\frac{1}{\omega\left(-p^2+q^2-4p+4q\right)+(-p^2+4q-15)}\beta^{n-1}+\frac{1}{\omega(p^2-q^2+4p-4q)+(-q^2+4p-15)}\gamma^{n-1}\right\}$$

($p=\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}$、$q=\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}$)

という一般項を得ることに成功しました。

4. 参考文献、ホームページ

http://club.pep.ne.jp/~asuzui/page10.html

〔フィボナッチ数列の自然界現象、木の枝わかれ〕など