$x^2+y^2+z^2=w^2$の法則性

数学B班1

堤　祐太　　安川　峻平　　平郡　耀人

１．はじめに

$a^2+b^2=c^2$には整数解の一般解がある。$a=m^2-n^2,\ b=2mn,\ c=m^2+n^2$

ただし、m,nは自然数で$m>n$とする。

そこで私たちは$x^2+y^2+z^2=w^2$の整数解の一般解がないかということに興味をもち、調べた。また、その活用法について考えた。

２．研究方法

Excel でx,y,zに具体的な数値を代入した。具体的には１つの文字の値を固定して残りの３つの数を調べた。そして見つかった整数の組み合わせをノートに書き出し、それらについて規則を探した。

固定する数が奇数の場合、規則は発見できたが、偶数の場合、規則は発見できなかった。

例）固定する数が７のとき

x	y	z	$x^2+y^2+z^2$ $(=w^2)$	w
7	20	2	453	21.2838
7	21	2	494	22.22611
7	22	2	537	23.17326
7	23	2	582	24.12468
7	24	2	629	25.07987
7	25	2	678	26.03843
7	26	2	729	27
7	27	2	782	27.96426
7	28	2	837	28.93095
7	29	2	894	29.89983
7	30	2	953	30.8707

３．結果

見つけた数は等差数列、階差数列となっていたので、それを一般式の形でまとめた。

まとめると次のようになった。

固定する数が奇数のとき

$$3^2+(2n)^2+(2n^2+4)^2=(2n^2+5)^2$$

$$5^2+(2n)^2+(2n^2+12)^2=(2n^2+13)^2$$

$$7^2+(2n)^2+(2n^2+24)^2=(2n^2+25)^2$$

・・・

$(2k+1)^2+(2n)^2+(2n^2+2k^2+2k)^2=(2n^2+2k^2+2k+1)^2$

ただし、固定する数が１のとき

$1^2+(2n+2)^2+(2n^2+4n+2)^2=(2n^2+4n+3)^2$

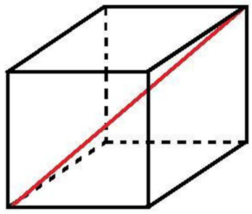
よって、$x^2+y^2+z^2=w^2$の一般解は

$x=1$のとき　$1^2+(2n+2)^2+(2n^2+4n+2)^2=(2n^2+4n+3)^2$

$x\neq 1$のとき　$(2k+1)^2+(2n)^2+(2n^2+2k^2+2k)^2=(2n^2+2k^2+2k+1)^2$

（ただし、n, kは自然数）となった。

また、この式を利用して、３辺と対角線の長さがすべて整数になる直方体を求めることができるということがわかった。



４．課題

・必要十分性を論理的に証明する。

具体的には

$(2k+1)^2+(2n)^2+(2n^2+2k^2+2k)^2=(2n^2+2k^2+2k+1)^2$　・・・①

$1^2+(2n+2)^2+(2n^2+4n+2)^2=(2n^2+4n+3)^2$・・・②

①, ②の式は確かに　$x^2+y^2+z^2=w^2$・・③　の整数解を代入した形となっている。

しかし、③の整数解が①、②のみで表現できるということは示せていない。

・次数を増やすとどうなるのか、加える平方数を増やすとどうなるのか。

・グラフに表すことができないか。

５．参考文献ならびに参考 Web ページ

『世界は２乗でできている　自然にひそむ平方数の不思議』

小島寛之　著　（２０１３）　　講談社（ブルーバックス）