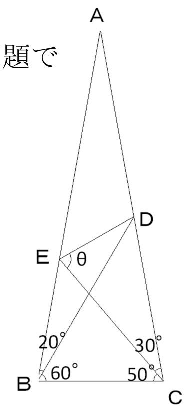
ラングレーの問題

数学 B3 班　　松本翔　金剛亮太

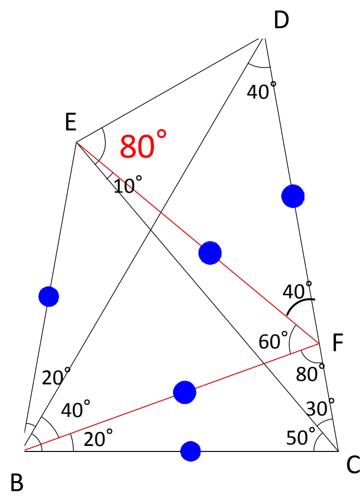
1．はじめに

　ラングレーの問題とは 1922 年に E.M. ラングレーが発表した平面幾何学の問題で「AB＝AC の二等辺三角形 ABC があり、辺 AB 上に点 E
辺 AC 上に点 D を∠CBD＝60°　∠ECB＝50°　となるように
とったとき∠DEC の大きさを求めよ。」
といった問題である。以下∠DEC＝ θ とする。

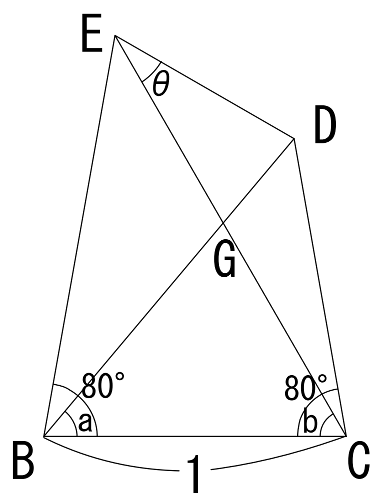


2．研究方法

(1) まず上の問題を、補助線を用いて解いてみた。
　最初に DC 上に∠FBC＝20°　となる点 F をとり、E,B と結ぶ。
∠BCF＝∠BFC＝80°　より BC＝BF
また三角形 BCE は二等辺三角形なので BC＝BE＝BF
よって△FBE は頂角 60°　の二等辺三角形になるから正三角形。
これより BF＝FE
∠FBD＝∠FDB＝40°　より BF＝FD
よって FE＝FD で△EFD は二等辺三角形。
よって∠EFD＝40°　より∠DEF＝70°
したがって θ ＝10°　＋70°　＝80°



(2) どんな角度でも解けるように θ についての一般式を作る。
BC＝1, ∠DBC＝a,　∠ECB＝b,　とし、正弦定理と余弦定理を用いて
各辺の長さを a,　b を用いて表す。



三角形 EGD において正弦定理より

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{GD}\sin(a+b)}{\mathrm{DE}} \cdot\cdot\cdot (※)$$

GD と DE を a, b を用いて表すことができれば、この式
に代入すれば θ についての一般式の完成である。
まず GD を求める。
GD＝BD－BG・・・①
正弦定理より

三角形 BCD において $\mathrm{BD} = \dfrac{\sin 80°}{\sin(100° - a)}$　・・・②

三角形 BCG において $\mathrm{BC}=\dfrac{\sin b}{\sin(a+b)}$　・・・③

①〜③より　$\mathrm{GD}=\dfrac{\sin 80^\circ}{\sin(100^\circ-a)}-\dfrac{\sin b}{\sin(a+b)}$・・・④

次に DE を求める

三角形 CED において余弦定理より

$\mathrm{DE}^2=\mathrm{CE}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CD}\cos(80^\circ-b)$・・・⑤

正弦定理より

三角形 BCE において　$\mathrm{CE}=\dfrac{\sin 80^\circ}{\sin(100^\circ-b)}$・・・⑥

三角形 BCD において　$\mathrm{CD}=\dfrac{\sin a}{\sin(100^\circ-b)}$・・・⑦

⑤〜⑦より

$$\mathrm{DE}=\sqrt{\frac{\sin 80^\circ}{\sin^2(100^\circ-b)}+\frac{\sin^2 a}{\sin^2(100^\circ-a)}-\frac{2\sin 80^\circ\cdot\sin a\cdot\cos(80^\circ-b)}{\sin(100^\circ-b)\cdot\sin(100^\circ-a)}}\cdots⑧$$

④, ⑧を(※)に代入し

$$\sin\theta=\frac{\left\{\dfrac{\sin 80^\circ}{\sin(100^\circ-a)}-\dfrac{\sin b}{\sin(a+b)}\right\}\cdot\sin(a+b)}{\sqrt{\dfrac{\sin^2 80^\circ}{\sin^2(100^\circ-b)}+\dfrac{\sin^2 a}{\sin^2(100^\circ-a)}-\dfrac{2\sin 80^\circ\cdot\sin a\cdot\cos(80^\circ-b)}{\sin(100^\circ-b)\cdot\sin(100^\circ-a)}}}$$

３．結果

θ についての一般式が得られた。よって、∠BCF＝∠BFC＝80° のパターンの全ての場合のラングレーの問題を一瞬にして解けるようになった。

４．参考文献

「ラングレーの問題」http://www.himawarinet.ne.jp/~rinda/framepage1.html