四平方の定理

～自然数を平方数の和で表す～

数学班　湯島　康友

１．はじめに

どんな自然数でも高々４つの平方数を足しあわせることで表せるという四平方の定理(具体的にはラグランジュの四平方定理：ここでは単に四平方の定理とする)を本で知り、興味を持った。調べるうちに自然数Nを高々４つの平方数の和で表す方法の総数r_4を与えるヤコビの四平方の定理(次式)を発見した。(※シグマ記号は、自然数Nの正の約数のうち、4で割り切れないものの和)

$$r_4(N) = 8 \sum_{4 \nmid d | N} d$$

ただし、これは根を正負ともに考え、足す順序を入れ替えたものも異なる場合とみるときの値である。そこで、自然数の平方数高々４つの和の形での表し方について、

(ｉ)足す順序を変えた場合を同一のものとみるか否か

(ⅱ)平方数の根について、正のみとするか正負両方を考えるか

という２つの条件を操作することで、表し方の総数に現れる規則性を調べることにした。

2.　研究方法

(イ)足す順序の別は無視、平方数の根が正のみという条件の下、自然数を高々４つの平方数で表す方法の数を$N = 1,2,3,\cdots$の順に調べる。(この場合をAとする)

(ロ)１から順にそれぞれについて(イ)で求めた４つの平方数の組それぞれに対し

①足す順序を変えたものも異なる場合とみるときは､組の中で足す順序の並び替えを考える。(この場合をBとする。４つの位置に４つの平方数を並べることに同じ)

②根を正負両方考える場合は、組の０以外の数それぞれについて根の正負を考える。(この場合をCとする。おのおのの組に対し2^kで求まる。ただしｋは組の４数のうち０以外の数の数)

③根の正負や足す順序の別の両方を考えるとき、それぞれの組について①，②両方が考えられるので、積の法則を用いる（この場合をDとする）

3.　結果

・1から25までの(×、×)の総数は1，２，３のいずれか。

・平方数の(×、×)の総数は直前より大きくなる。

・(〇、×)の総数」について、$N = 4,16$のときは５で奇数だが、それ以外は偶数。

・2^kについて、(×、×)の総数はkが奇数のとき１，kが偶数のとき２となる。

・(〇、〇)の総数について、素因数分解すると

(ｉ)$N = 18$のみ素因数を$(2,3,13)$の３種類持つ。ほかは１種類か２種類。

(ⅱ)$N = 10,17,20,22$は素因数3を２つ持つ。

(ⅲ）全ての場合に2を必ず素因数に持つ。

(iv) $N = 13$のみが7を、$N = 25$のみが31を、$N = 9,18$のみが13を持ち、残りのものの素因数は全て3である。

N	A	B	C	D
1	1	4	2	8
2	1	6	4	24
3	1	4	8	32
4	2	5	18	24
5	1	12	4	48
6	1	12	8	96
7	1	4	16	64
8	1	6	4	24
9	2	10	10	104
10	2	18	20	144
11	1	12	8	96
12	2	8	24	96
13	2	16	20	112
14	1	24	8	192
15	1	12	16	192
16	2	5	18	24
17	2	24	12	144
18	3	30	28	312
19	2	16	24	160
20	2	18	20	144
21	2	28	24	256
22	2	24	24	288
23	1	12	16	192
24	1	12	8	96
25	3	28	22	248

4. 課題

・上記の表を分析し、規則性の考察をする。

・今回調べた自然数より大きな自然数についても表し方を計算し、さらなるデータを得る。

・今回得た結果について、成り立つことの証明をする、または反例をあげる。

5. 参考文献並びに参考 web ページ

・四平方の定理並びにヤコビの四平方定理の説明部分は、wikipedia を参考に作成しました。