複素素数の分布と性質

数学班　　吉田　翔

１．はじめに

素数についての問題は難題数学の中でもとりわけ謎多き問題である。
私たちが普段素数といっているものは、実は『実数であるという条件下での』素数であり、それが素数のすべてではない。
私はその条件を払い、実数の範囲を超えた虚数の範囲での素数について研究を行った。
研究動機としては素数というトリッキーな数が好きだったからということが大前提にはあるのだが、さすが素数というべきか実数での研究はあまりに難題過ぎたためでもある。
そうして、複素数範囲での素数である『複素素数』についての研究を始めた。

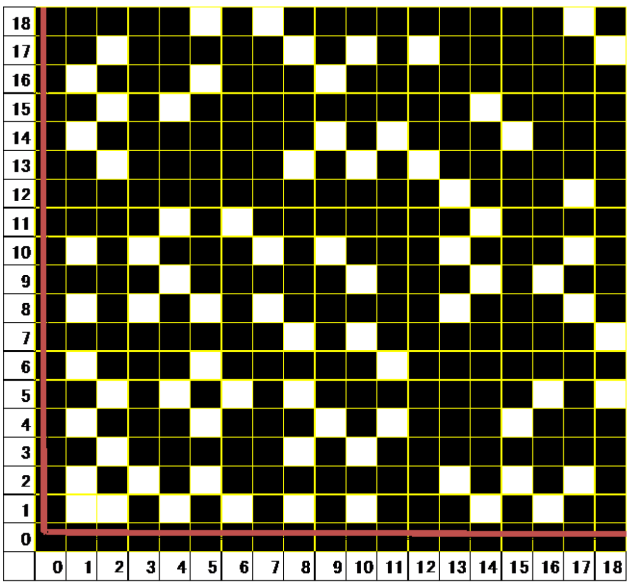
2. 研究方法①

実部、虚部を整数と定める。複素素数の定義『±１，±ｉ以外のいかなる数でも割り切れない複素数範囲での数を素数とする。』に従って素数であるかどうかを判断するのは非常に困難であったので、そこから容易に導き出せる定理『複素数の実部と虚部をそれぞれ二乗した数の和が素数であれば、その複素数は素数である(逆は成立しない)。』を元に複素数平面に分布させ、その分布から複素素数の性質を発見する。

3. 結果①

以下(左図)の分布から以下(右側)の性質を発見しました。

【a+bi について縦軸を a、横軸を b と取った複素平面】



(白抜きの部分が素数)

●直線 a=b 上には素数は存在しない。
(ただし１+i は例外)

●a 軸上､b 軸上には素数は存在しない。

●a 軸､b 軸､直線 a=b､直線 a=−b で線対称。

●a、b がともに奇数(または偶数)の場合その複素数は素数ではない。

●a、b がともに有理素数であってもその複素数が素数とは限らない。

4. 結果①を受けて

簡単な性質しかわからなかった、しかしある程度の規則なら証明できることがわかった。
研究方法①でも述べたように、結果①は条件『複素数の実部と虚部をそれぞれ二乗した数の和が素数であれば、その複素数は素数である（逆は成立しない）。』に従ってのみの結果である。そこで、複素数の範囲内における素数の定義『±１，±ｉ 以外のいかなる数でも割り切れない複素数範囲での数を素数とする。』に従って、同様に複素数平面に分布させてみた。

5. 研究方法②

同様に実部・虚部を整数と定め、実部・虚部をそれぞれ0から27の間で移動させて虱潰しに一つ一つ素数であるかどうか確認する。確認方法で『これは素数である』と確定させられるものが見つからなかったので、一つ一つ慎重に確認する（ただし、結果①で確認できた複素素数は確実な素数である）。

6. 結果②

結局、新たに発見できた素数は実軸、虚軸の上に存在する素数のみだけであった。理由は一つの複素数が素数であるかを確認するための効果的な公式的なものがないため、時間がかかり過ぎるからである。
考察としては、『実部と虚部が互いに素である（実部と虚部をともに整数の範囲で割り切ることのできる整数が存在しない）』ことと『実部・虚部がともに実素数であってもその複素数は素数であるとは限らない』ことが予想できたが反例をあげることも証明をすることもできなかった。

7. 課題と方針

研究当初は複素数平面の単元を履修しておらず、複素数平面の性質について理解していなかったので、性質を理解した後に考えてみると、複素数平面の重要な性質である『回転』と『極形式の表現』を駆使すると真実に近づくことができるのではないかと思う。回転の考え方を用いると、ある点ｚについてその数が素数である（二つ以上の複素数に分解できる）かどうかは、原点を中心とする半径｜ｚ｜の円の内部に存在する複素数についてのみ考えればよいため、時間の短縮につながる。とにかく、１年間という短い時間では虱潰しに確認することは不可能に近い。
そのため、簡単に素数であるかどうかを判断できる方法を探さなくてはならない（もしかすると、その公式的なもの自身が素数の規則につながるかもしれない）。難しい内容の研究テーマであったが、これを私たち高津高校６８期生で終わらせるのではなく、ぜひとも後輩である６９期生以降の高津生が引き継いで研究してほしいと思う。

8. 感想

非常に時間のかかる研究テーマであったし、複素数に関する知識だけでは通用しないことが多々あった。しかし、数学的好奇心をくすぐる、非常に興味深いものであった。
結論は出なかったがいつか後輩がこの研究成果を基にして真理をあらわにしてくれることを願っている。

9. 参考文献

・数学Ⅰ（東京書籍）
・数学Ａ（東京書籍）
・数学Ⅱ（東京書籍）
・数学Ⅲ（東京書籍）