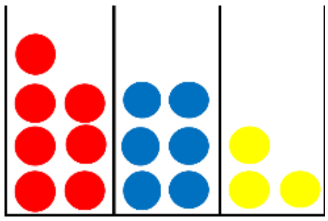
三山崩しの必勝法

数学班 宮嵜 達也

１．はじめに

三山崩しとは、いくつかの石が下図のように３つの山に分けて置かれているのを２人で交互に取り合い、最後の１個をとったら負けというゲームである。尚、１つの山からなら一度に何個でも石をとることができるが、一度に２つ以上の山から石をとることはできない。このゲームに何か必勝法があるのではないかと思い研究を始めた。



２．山が２つの場合

いきなり山が３つの場合を考えると複雑だったので、まず山を１つ減らし、山が２つの場合について調べてみることにした。このとき２つの山の石の個数を(x, y)と表す。まずはもっとも単純な形である(x, y)=(1, 1)から始めた。この場合先手はどちらの山からとっても相手に最後の石を取らせることができ、先手必勝。また、(x, y)=(2, 1)のようにどちらか一方のみを増やした場合でも先手は増やしたほう(この場合はx)の石をすべて取ってしまえば、やはり(x, y)=(1, 1)と同じように先手は勝つことができる。つまり自然数nを用いて表すと、(x, y)=(n, 1)の場合先手必勝となる。このように徐々に数を大きくしていくことで法則を探っていった。

山が二つの場合については以下のことが分かった。

(x, y)=(1, 1), (m, n) (m≠n)のとき先手必勝

(x, y)=(n, n) (n≧2)　　　のとき後手必勝

「n≧2のとき(x,y)=(n,n)ならば後手必勝」…(A)の証明

（ｉ）n＝2のとき（A）は成り立つ

（ii）n≦kのとき(A)が成り立つと仮定すると

(2,2),(3,3),･･･(k-1,k-1),(k,k)のとき後手必勝

n＝k+1のとき

(k+1,k+1)が後手必勝であることを示す。

mをk未満の自然数とするとこのとき先手がとり得るパターンとしては

①$(k+1,k+1)\xrightarrow[\text{先手がm個取る}]{}(k+1,k+1-m)\xrightarrow[\text{後手がm個取る}]{}(k+1-m,k+1-m)$

②$(k+1,k+1)\xrightarrow[\text{先手がk個取る}]{}(k+1,1)\xrightarrow[\text{後手が(k+1)個取る}]{}(0,1)$

③$(k+1,k+1)\xrightarrow[\text{先手が(k+1)個取る}]{}(k+1,0)\xrightarrow[\text{後手がk個取る}]{}(1,0)$

（ｉ）,（ii）より（A）は真である。

上の証明より、(x, y)=(n, n)(n≧2)のとき後手はどちらかの山の石の個数が１個以下になるまで先手と同数個の石を取り続けていれば必ず勝つことができる。また、(x, y)=(m, n)(m≠n)のとき先手は一手目で２つの山の石の個数を同数にすれば、以降先手はどちらかの山の石の個数が１個以下になるまで後手と同数個の石を取り続けることで勝つことができる。ここで、先手が必勝の場合は１手目で後手必勝形にすることができるのではないかと考え、山が３つの場合については後手必勝形について重点的に調べることにした。

３．山が３つの場合

先ほどと同様に３つの山の石の個数を(x, y, z)と表し、そしてもっとも単純な形である(x, y, z)=(1, 1, 1)から徐々に石を増やしていくという形をとった。この場合は後手必勝であった。

３ついっぺんに石の数を変えるとパターンが膨大になるので z を初めの段階で最も少ない山の石の数とし、z=1 の場合、z=2 の場合…という風にそれぞれの場合について後手必勝である時の x と y について調べた。

z=1 の場合について後手必勝形を探した結果以下の表のようになった。

X	Y	Z
3	2	1
5	4	1
7	6	1
9	8	1
11	10	1
13	12	1
2n+1	2n	1

左のように x, y ともに等差数列となっており、一般項はそれぞれ 2n+1, 2n と求められる。つまり、z=1 のとき、(x, y, z)=(1, 1, 1), (2n+1, 2n, 1)ならば後手必勝であることがわかった。これも数学的帰納法で証明ができた。。

z=2, 3, 4…と増やしていった時も、後手必勝形を探して表にまとめ、一般項を推測するという形をとった。その結果、

z=2 のとき(x, y, z)=(4n+2, 4n, 2)、(4n+3, 4n+1, 2)

z=3 のとき(x, y, z)=(4n+3, 4n, 3)、(4n+2, 4n+1, 3)

z=4 のとき(x, y, z)=(8n+4, 8n, 4)、(8n+5, 8n+1, 4)、(8n+6, 8n+2, 4)、(8n+7, 8n+3, 4)

z=5 のとき(x, y, z)=(8n+5, 8n, 5)、(8n+4, 8n+1, 5)、(8n+7, 8n+2, 5)、(8n+6, 8n+3, 5)

z=6 のとき(x, y, z)=(8n+6, 8n, 6)、(8n+7, 8n+1, 6)、(8n+4, 8n+2, 6)、(8n+5, 8n+3, 6)

z=7 のとき(x, y, z)=(8n+7, 8n, 7)、(8n+6, 8n+1, 7)、(8n+5, 8n+2, 7)、(8n+4, 8n+3, 7)

であるとき、後手必勝であることが推測された（z=3 までは証明済み）。そして初めの石の数がこれに当てはまらない場合は先手必勝となる。

残念ながら z=8 以降のときについては調べることはできなかったが、z=1～7 の流れを見るに、おそらく次は(x, y, z)=(16n+〇, 16n+〇, 8)という形の後手必勝形が８パターンあらわれるものと推測される。

４．課題

z=8 以降のときも調べて、z を文字で一般化する。

z=4～7 の証明をして、研究内容をより確実にする。