パスカルの三角形の多次元化と多項定理

数学班；関　良我

１．はじめに

僕がこの研究をはじめようと志したきっかけは、高校一年のとき授業で習ったパスカルの三角形（図１）と二項定理の関係について、$(a+b+c)^n$や$(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d})^n$の展開ともなにか関係があるのではと思ったことだった。

パスカルの三角形とは、最上段に１を配置し、
それより下の段に右上の数と左上の数の和を置いた三角形のことである。
これは二項定理と深い関わりがあり、パスカルの三角形の
n 段目に対して、$(a+b)^{(n-1)}$の係数が対応している。
では$(a+b+c)^n$や$(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d})^n$の展開とは
どのような関係があるのか、という点に興味を持った。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

（図１）

２．試行１

まず、最上段の数は１のままで、下段の数の増え方を３つや４つに変えてみた。
その結果が(図２)である。

１０以上の数はくりあがるとすると、これらの数はそれぞれ１１１の累乗、１１１１の累乗を表していることがわかった。
また、もとのパスカルの三角形は１１の累乗に対応している。
これは興味深い結果であるが、求めた結果は得られなかった。

1
111
12321
1367631
14<u>*1016191610*</u>41
（＝151807041）
:
:

1
1111
1234321
136<u>*101210*</u>631
（＝1371330631）
:
:

（図２）

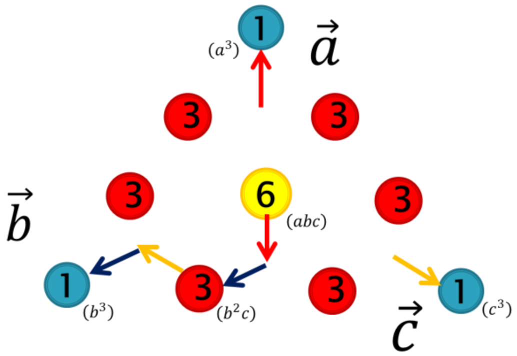
３．試行２

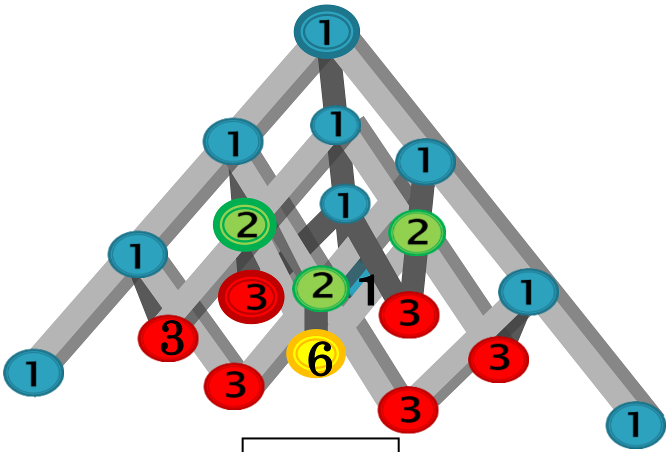
次に、パスカルの三角形は平面（二次元）だから二項定理を表すのではないかと考え、
パスカルの三角形の三次元化、四次元化に挑んだ。
その三次元版をパスカルの三角錐と名付けた。

４．パスカルの三角錐

まず、側面にパスカルの三角形を貼りつけて、それぞれの数から下の三方向に点を伸ばす。すると、(図 3)のように各段の断面が三項係数と対応していることがわかった。
また断面の三角形の各頂点に a,b,c ベクトルを定めると、
各項の係数がちょうど対応している。
たとえば３乗であれば以下のようになる。

$$(a+b+c)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + 1c^3 + 3c^2a + 3ca^2 + 6abc$$





（図３）

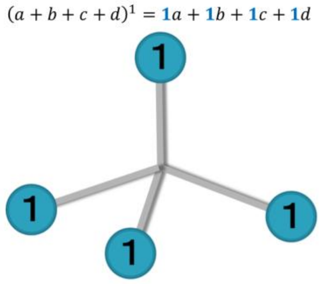
これで、三項係数とパスカルの三角形の関係性があることが確認できた。

５．パスカルの四次元正四面体

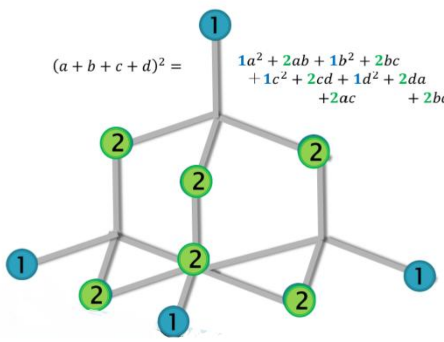
三次元のときでは、パスカルの三角形を３つ合わせたので、四次元化ではパスカルの三角錐を４つ合わせればいいのではと思い、頂点同士をつなげれば正四面体になるような図形を作り、それをパスカルの四次元正四面体と名付けた。
ここでいう四次元とは、縦横高さの３つの次元に「時間」による変化を組み合わせた、いわゆる動きのある立体のことである。
ここではその動きを掲示することはできないので、1〜3 乗までの例を示す。(図 4)

$$(a+b+c+d)^0 = 1$$

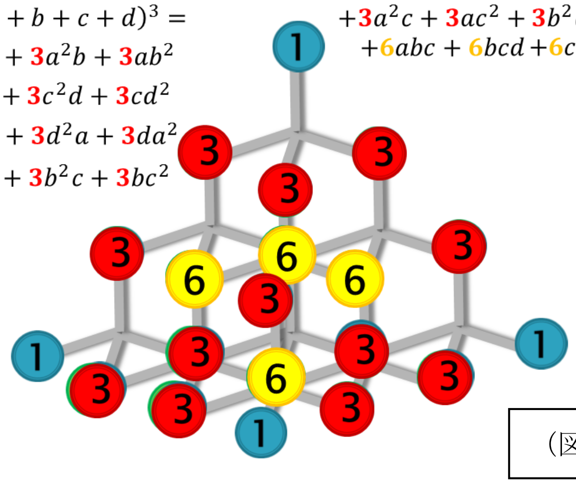
$$(a+b+c+d)^1 = 1a + 1b + 1c + 1d$$



$$(a+b+c+d)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 + 2bc + 1c^2 + 2cd + 1d^2 + 2da + 2ac + 2bd$$



$$(a+b+c+d)^3 =$$
$$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2$$
$$+1c^2 + 3c^2d + 3cd^2$$
$$+1d^3 + 3d^2a + 3da^2$$
$$+1b^3 + 3b^2c + 3bc^2$$
$$+3a^2c + 3ac^2 + 3b^2d + 3bd^3$$
$$+6abc + 6bcd + 6cda + 6dab$$



（図４）

６．結論と考察

上記の図形を作成する中で模型をつくったり、さまざまな性質を試行錯誤しているうちに、いくつか発見した点がある。

まず、ある図形の断面はその図形の１つ下の次元になっているということだ。パスカルの三角錐(三次元)を切り取った断面が三項係数を表す三角形(二次元)になっていたり、四次元正四面体はその時間変化をとめることで四項係数を表す正四面体(三次元)になっていた。

さらに、パスカルの三角形は横に切り取った断面の直線(一次元)が二項定理を表す。

このように、ある図形の断面はその１つ下の次元になっていることは私たち高校生の知らない多次元的な世界にも通じる法則なのかもしれない。

次にパスカルの三角形は二項係数だけでなく、その上の三項係数や四項係数、次元の定義を一般化することができたなら何項にでも対応していることが予測できる。さらにそれだけでなく、パスカルの三角形はフィボナッチ数列や三角数、累乗数や黄金比など数学上重要な数との深い関係も研究を重ねる上で垣間見えた。

一見ごく単純に思えるパスカルの三角形だが、その本質は深く、とても興味深く感じた。先に述べたように、この研究の目的はパスカルの三角形が三項係数や四項係数と関わりがあるかどうかを調べるということだったので、結果としては大いに関係があるということになる。しかし、さらにその先の次元にも五項、六項とも関係のある図形が広がっていることが考えられるので、いつの日にかそれらを一般化し、解き明かしてみたい。