正ｎ角形の頂点を結んでできる三角形の合同類の個数は？

数学班：久世　逸平　　バセダ　保

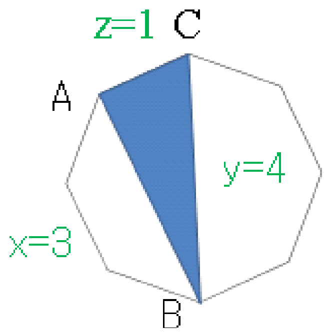
キーワード：合同類　組み合わせ

１．はじめに

数学Ａの授業で「正七角形の３個の頂点を結んで三角形を作るとき，正七角形と辺を共有しない三角形は何個あるか？」という問題がありました。この問題自体は，
(すべての三角形)－(一辺のみを共有する三角形)－(二辺を共有する三角形)
という具合に解けます。では，異なる「形」の三角形は何種類できるのでしょうか。

２．問題の内容

三角形の各辺の外側にいくつ正ｎ角形の辺があるかに注目して考える。
三角形ＡＢＣの辺ＡＢの外側にある正ｎ角形の辺の個数をｘ個とし，
ＢＣ，ＣＡについても同様にｙ個，ｚ個とする。
ｘ＋ｙ＋ｚ＝ｎとなるｘ，ｙ，ｚの大きさが決まれば
ＡＢ，ＢＣ，ＣＡの長さもそれぞれ決定される。
三角形は３辺の長さが決まれば，形・大きさも決定されるので，
自然数ｘ，ｙ，ｚの解の組の個数がそのまま三角形の合同類の個数となる。
（※ｘ，ｙ，ｚを並び替えて同じになる組は同じとみなす）



正八角形の例

３．ｎ＝６の場合の解法

⑴辞書式組み合わせ列挙による解法

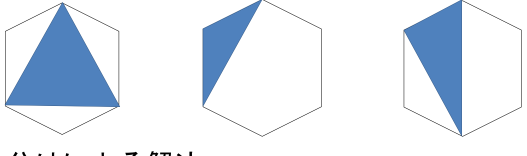
ｘ＋ｙ＋ｚ＝６（ｘ，ｙ，ｚは自然数）…（ｉ）の解の組を列挙し，そのうち，合同類となるものがいくつあるか数える。

（ｘ，ｙ，ｚ）＝（１，１，４），（１，２，３），（１，３，２），（１，４，１），
（２，１，３），（２，２，２），（２，３，１），（３，１，２），
（３，２，１），（４，１，１）

（２，２，２）…（あ）
（１，１，４）（１，４，１）（４，１，１）…（い）
（１，２，３）（１，３，２）（２，１，３）（２，３，１）（３，１，２）（３，２，１）…（う）

∴　合同類の個数は３個

（あ）　（い）　（う）



⑵場合分けによる解法

（ｉ）の解の組のうち合同類がいくつあるか場合分けを用いて考える。

① ｘ，ｙ，ｚが３つとも同じになるパターン

（ｘ，ｙ，ｚ）＝（２，２，２）　∴ａ＝１個

②ｘ，ｙ，ｚのうち２つが同じになるパターン（並び替えて同じになる組は同じとみなす）（※３つとも同じになるパターンは除く）

（ｘ，ｙ，ｚ）＝（１，１，４）　∴ｂ＝１個

③ｘ，ｙ，ｚの３つとも異なるパターン（並び替えて同じになる組は同じとみなす）

まず（ｉ）の解の組の個数を求める。

ｘ＋ｙ＋ｚ＝６⇔（ｘ－１）＋（ｙ－１）＋（ｚ－１）＝３

○○○｜｜，この５つの並び方を考えればよいので，${}_5\mathrm{C}_2$

今，③の個数をｃ個とするとａ＋３ｂ＋６ｃ＝${}_5\mathrm{C}_2$

なるのでｃ＝１と求まる。

①②③より，（合同類の個数）＝ａ＋ｂ＋ｃ＝３となる。

４．一般のｎの場合の解法

ｘ＋ｙ＋ｚ＝ｎ　（ｘ，ｙ，ｚは自然数）…（ⅱ）の解の組のうち合同類がいくつあるか場合分けを用いて考える。

(1)ｘ，ｙ，ｚが３つとも同じになるパターン　a_{n}個とする。

(2)ｘ，ｙ，ｚのうち２つが同じになるパターン（並び替えて同じになる組は同じとみなす）（※３つとも同じになるパターンは除く）　b_{n}個とする。

(3)ｘ，ｙ，ｚの３つとも異なるパターン（並び替えて同じになる組は同じとみなす）c_{n}個とする。

まず（ⅱ）の解の組の個数を求める。

ｘ＋ｙ＋ｚ＝ｎ⇔（ｘ－１）＋（ｙ－１）＋（ｚ－１）＝ｎ－３

○○○……○○｜｜，このｎ－１個の並び方を考えればよいので，${}_{\mathrm{n}-1}\mathrm{C}_2$個

いま，(3)の個数をc_{n}個とするとa_{n}＋３b_{n}＋６c_{n}＝${}_{\mathrm{n}-1}\mathrm{C}_2$となる。

∴（合同類の個数）＝$a_{\mathrm{n}}+b_{\mathrm{n}}+c_{\mathrm{n}}=a_{\mathrm{n}}+b_{\mathrm{n}}+\frac{1}{6}({}_{\mathrm{n}-1}\mathrm{C}_2-a_{\mathrm{n}}-3b_{\mathrm{n}})=\frac{1}{12}(\mathrm{n}^2-3\mathrm{n}+2+10a_{\mathrm{n}}+6b_{\mathrm{n}})$

次にa_{n}，b_{n}が，式でどのように表せられるかを考える。

①ｎが３の倍数でないとき

(1)を満たすものは存在しないのでa_{n}＝０個

②ｎが３の倍数のとき

(1)を満たすのは（ｘ，ｙ，ｚ）＝$(\frac{\mathrm{n}}{3},\frac{\mathrm{n}}{3},\frac{\mathrm{n}}{3})$より$a_{\mathrm{n}}$＝１個

③ｎが奇数のとき

(2)を満たすのは（ｘ，ｙ，ｚ）＝（１，１，ｎ－２），（２，２，ｎ－４），（３，３，ｎ－６）……$(\frac{1}{2}(\mathrm{n}-1),\frac{1}{2}(\mathrm{n}-1),1)$

ただし，この中にa_{n}個だけｘ，ｙ，ｚが３つとも同じになるパターンが含まれている

ので，$b_n=\frac{1}{2}$（ｎ－１）$-a_n$

④ｎが偶数のとき

⑵を満たすのは（ｘ，ｙ，ｚ）＝（１，１，ｎ－２）（２，２，ｎ－４）

（３，３，ｎ－６）…… $(\frac{1}{2}$（ｎ－２），$\frac{1}{2}$（ｎ－２），２）

ただし，この中にa_n個だけｘ，ｙ，ｚが３つとも同じになるパターンが含まれている

ので，$b_n=\frac{1}{2}$（ｎ－２）$-a_n$

以上より，ｎ＝６ｋのとき　$\frac{1}{12}n^2$ 個

ｎ＝６ｋ＋１，６ｋ＋５のとき　$\frac{1}{12}(n^2-1)$ 個

ｎ＝６ｋ＋２，６ｋ＋４のとき　$\frac{1}{12}(n^2-4)$ 個

ｎ＝６ｋ＋３のとき　$\frac{1}{12}(n^2+3)$ 個

５．参考文献

特になし。