

エイムズの部屋

数学班：久世 逸平 バセダ 保

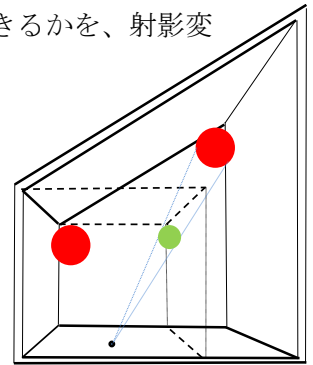
キーワード：エイムズの部屋 射影変換 消失点 無限遠点 調和数列

1. はじめに

文化祭のクラスの展示で、錯覚のトリックを使ったエイムズの部屋を作ることとなり、製作するにあたって、形や内部の図形をどのようにすれば描くことができるかを、射影変換を用いて考えた。また、文化祭後も射影変換について考え、学んだ。

2. エイムズの部屋とは

エイムズの部屋の中に入った2人の大きさは、定められた視点から見ると違って見える。これは2人と視点との距離が違うからである。この遠近感の錯覚によって、エイムズの部屋は直方体ではないのに直方体に見えるのである。



エイムズの部屋の上面図

3. 遠近感の錯覚の数学的な原理

例えば図1のように、視点をOとし、O、A、Bは同一直線上でこの順に並んでいるとする。このとき、A、Bは全く同じ点に見える。

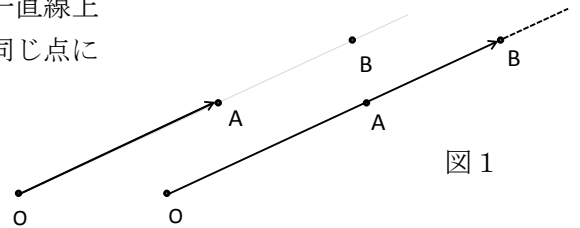
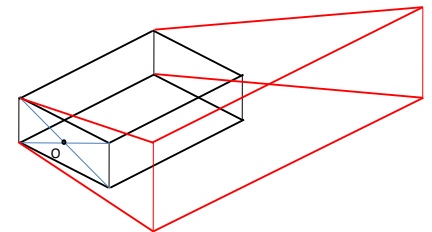


図1

4. エイムズの部屋への応用

(1) エイムズの部屋の形について

直方体上の点をP、Pの移動先の点をP'とする。O、P、P'が同一直線上で、この順またはO、P'、Pの順で並ぶようにP'を決める（勿論P=P'でもよい）。このようにP、P'を定めることで、PとP'は視点Oから見ると同一の点に見える。また、PをP'に写す変換を射影変換と呼ぶ。



直方体をエイムズの部屋の形に変換した図

(2) 内部の絵について

エイムズの部屋内部に、「歪んでいないように見える絵」を描くことで、今見ている部屋は直方体であるという思い込みを、さらに確信へと導くことができる。

① 右の面の場合

単なる相似変換なので、相似な図形を描くことで、左右とも合同な図形が描かれているように見せることができる。

② 下の面および、奥の面の場合

これらの面には、まず、マス目（に見える絵）を描くことを考えた。マス目を細かく描けば、マス目（見える絵）の上の点を結ぶことで、様々な絵を描くことができる。しかし、マス目（見える絵）を描くには計算量が多いので、幾何的性質を用い

ることとした。

まず、3つの面の代表として、ここからは奥面を例にする。図2のように、直方体の奥面をL、エイムズの部屋の奥面をL'とする。L上のマス目はL'上に、図2のように移る。この変換によって平面は平面に移るとする。

このとき、L上の直線は、L'上の直線に移る（以下、性質1とする）。

更に、L上のABに平行な直線は、L'上のABに平行な直線に移る（以下、性質2とする）。

続いて、AB、CDは左面、右面上でもあるので、図3のようにAB、CDは等分すればよい。ここで、性質1より、AB上の点とCD上の点を結ぶことで、マス目の横線が描ける。そして、性質1より、対角線は対角線に移るので、図4のようにそれと横線が交わる点の位置に縦線を描けばよい。性質2より縦線はABに平行に描ける。

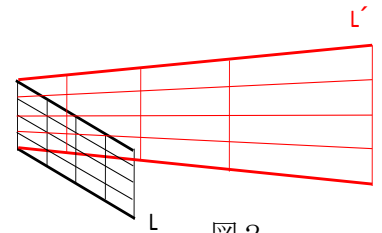


図2

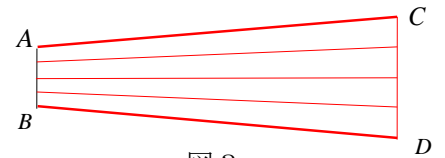


図3

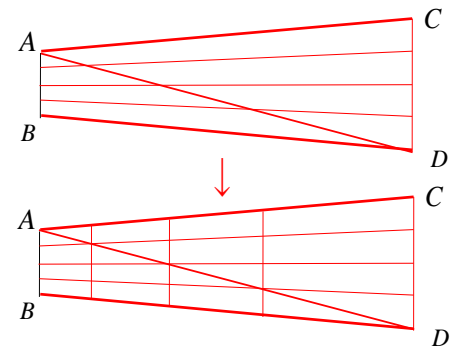


図4

5. 射影変換の性質

(1) 射影変換による平行な直線群の移り方

図5のように視点Oに近い順に、直線 l 上に適当な点 P_1, P_2, \dots をとる。

すると、無限遠点 P_∞ はOを通り l に平行な直線上にあるように見える。

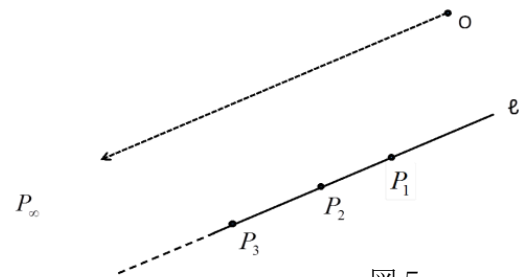


図5

(2) 等分された点と調和数列

等分された点が射影変換でどのように写るかについて考える。

図6のように直線 l_1 上に等分された点があり、直線 l_2 上に移った点がある。先ほどの議論により消失点Vは、Oを通り l_1 に平行な直線と l_2 との交点である。

まず図7のように補助線を引く。ただし、PQと l_1 は平行であり、 $A_{n+2}P$ とPQは同じ長さである。これらの長さを l とおく。

図8のように $\triangle OVA_{n+1}$ と $\triangle PA_{n+2}A_{n+1}$ に注目して次の式が成り立つ。ただし、 m はOVの長さである。

$$(a_{n+2} - a_{n+1}) : a_{n+1} = l : m$$

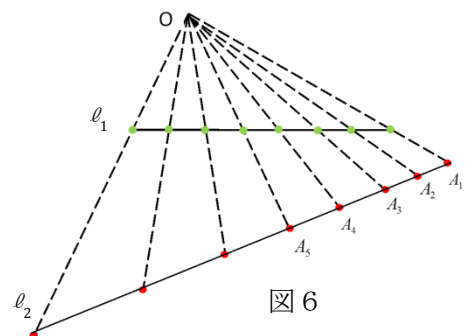


図6

図9のように $\triangle OVA_n$ と $\triangle QA_{n+2}A_n$ に注目して次の式が成り立つ。

$$(a_{n+2} - a_n) : a_n = 2\theta : m$$

先の2式を比較してうまくまとめると、次の結果を得る。

$$\frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$$

この数列を調和数列という。

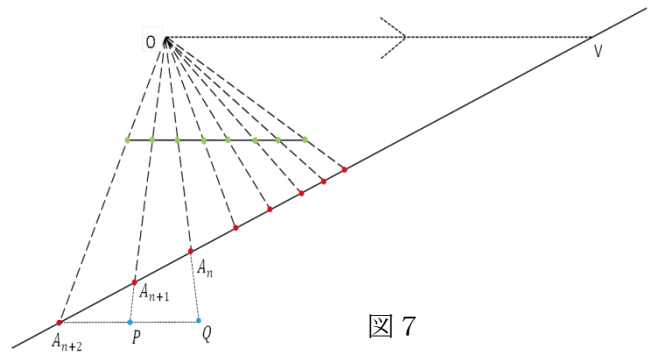


図7

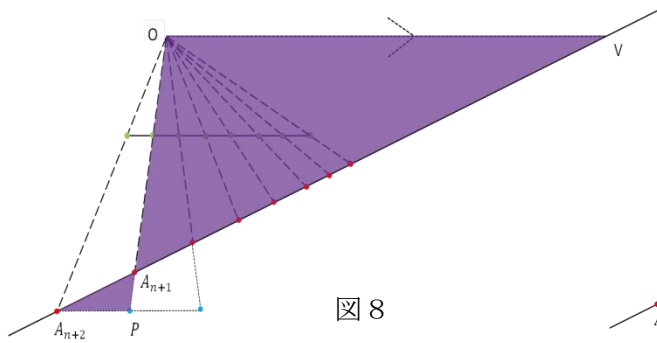


図8

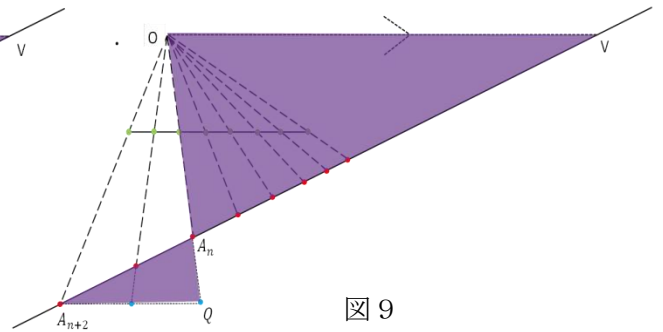


図9

6. 参考文献

http://staff.aist.go.jp/jun-fujiki/Kogakuin_cv_2010_03.pdf